現代物理最前線 2

大槻義彦 編

ビッグバン宇宙論は超えられるか

坂井伸之

不規則電子系の金属-絶縁体転移

大槻東巳

プラズマによる粒子加速

小方　厚

共立出版株式会社

刊行にあたって

いよいよ20世紀科学文明から21世紀の科学文明に移る．20世紀の物理学を振り返れば，その進歩・発展は，想像を絶するものがある．原子・素粒子はもとより，クォークからブラックホール，宇宙のはてまで，物理学は解明してきた．そしていま，生命，脳新素材，複雑系の解明まで突き進んでいる．21世紀はどんな科学文明になるのか，考えれば，むしろ恐ろしくさえなってしまう．このような現状にあって，まず何よりも現代物理学の各分野を，十分知っておくことが要求される．わが国の物理学者，研究者，物理教育者は，他の先進国の人びとよりも，物理学の異なる分野にうといと言われる．自分の専門分野には，きわめて高い識見をもっているのに，ほんの少し専門をはずれてしまうと，知識もないし，興味ももたなくなるという傾向にあるとされる．

このような現状を少しでも改善しようとするものが，前シリーズ『物理学最前線』とか物理科学雑誌『パリティ』である．幸い，前シリーズ『物理学最前線』は好評を得て，31巻まで刊行することができた．

そこで今回，まったく新しいシリーズとして，『現代物理最前線』を世に送ることにした．前シリーズと比べて，今シリーズは現代物理の生々しい現状の最新情報を満載するものである．

2000年2月

大槻　義彦

目　次

ビッグバン宇宙論は超えられるか＝坂井伸之

不規則電子系の金属-絶縁体転移=大槻東巳

プラズマによる粒子加速＝小方　厚

ビッグバン宇宙論は超えられるか

坂井伸之

1章 はじめに

熱いビッグバン宇宙がどのように創られたのか，宇宙がどのような物質で構成されているのか，最新の宇宙論研究がその謎を解き明かそうとしている．1980年代後半から宇宙観測の技術は急速に進歩し，高性能な宇宙望遠鏡や宇宙背景放射探査機によって宇宙の遠方（つまり過去）の姿が明らかになり始めた．さらに，宇宙空間を飛び回るダークマターの正体も，地下の宇宙線探査装置によって突き止められようとしている．本稿を書いていた1998年だけを振り返ってみても，以下のような画期的な観測結果が発表されている．

- 遠方にある数十個の超新星の明るさと赤方偏移の関係から，宇宙が加速膨張していることが示された．これは，負の圧力をもつ謎のエネルギー（宇宙項）の存在を示唆している．
- 神岡鉱山地下のスーパーカミオカンデ装置で，ニュートリノが飛行中に別の種類に変化する現象（ニュートリノ振動）が確認された．これにより，ニュートリノに質量があることが証明された．
- ハワイのケック望遠鏡によるクェーサー観測から，遠方の水素雲に含まれる重水素量が測定された．元素合成理論から推定されるバリオンの存在量によって，ダークマターの大部分が非バリオンであることが確実になった．

今後数年間は新しい観測データが次々と得られ，新聞や科学雑誌でも取り上げられることだろう．宇宙論研究も，多くの人々にとって身近なものになりつつある．そのような状況下において，宇宙論の現状と展望について専門家以外の方にも理解していただきたいと思い，本稿を書き始めた．

本稿で解説する内容およびその背景を簡単に説明しておこう．ビッグバン宇宙論とは，宇宙が大爆発によって始まり，高温・高密度の状態から膨張して現在

の姿になったという，1940 年代にガモフ (Gamov) が提唱した理論である[1,2]．それは，1929 年にハッブル (Hubble) によって発見された宇宙膨張，1965 年にペンジアス (Penzias) とウィルソン (Wilson) によって発見された宇宙背景放射，ヘリウムや重水素など軽元素の存在量，の 3 つの観測事実によって裏づけられ，確立した理論となっている．しかし，この古典的なビッグバン宇宙論によって宇宙のすべてが解明されたわけではない．元素合成以前の宇宙については全く未解明であり，それに関連して，構造形成等の説明のできない宇宙論的問題は多く残されていた．

1980 年代は，素粒子論[3,4]の影響を受けて宇宙論が進歩した時代であった．素粒子の統一理論から，インフレーション，バリオン生成，非バリオンダークマター，位相欠陥，そして宇宙の量子論的誕生という，重要なアイデアが生まれたのである[2,5]．特に，宇宙がある時期に急激な膨張を経験したとするインフレーション宇宙論[6]は，宇宙の一様・等方性，平坦性，構造の起源等を説明し，ビッグバン宇宙を創る唯一の理論と考えられている．

一方，ビッグバン宇宙論が生まれるずっと前の 1930 年代より，天体系の観測から，姿は見えないが重力的に寄与する物質（ダークマター[7]）の存在が指摘されていた．もともと宇宙論とは直接関係のない問題であったが，ビッグバン宇宙論が誕生すると，宇宙の膨張則や元素合成理論等にかかわる宇宙論的中心課題のひとつとなった．特に，素粒子論から非バリオンダークマターのアイデアが導入されると，それは宇宙の構造形成において重要な役割を担うと考えられるようになったのである．

インフレーションとダークマターは一見独立な理論のようであるが，実は密接な関係がある．ひとつは，前者は密度揺らぎの起源を説明し，後者は密度揺らぎの成長を説明するので，構造形成理論には両者が関与しているという点である．そしてより重要なことは，どちらもその正体が不明で，その背後には未知の素粒子理論がかかわっているということである．例えば，ダークマターの正体が明らかになったとしたら，それ自体が宇宙論的にも素粒子論的にも重大な成果であるが，インフレーションモデルの検証につながる可能性もある．そこで本稿では，宇宙論は今ビッグバンモデルを超えてどのような状況にあるのか，インフレーションとダークマターを切り口にまとめることにした．ただし，

限られた紙面により各事項について詳細な解説はできなかったので，必要に応じて巻末に挙げた参考文献を参照していただきたい．

なお，素粒子物理がかかわってくる第3章以降では，煩雑さを避けるため，光速 c，プランク定数 $\hbar = h/2\pi$，ボルツマン定数 k を1とする自然単位系を用いる．

2章 ビッグバン宇宙論

2.1　一様・等方宇宙モデル

特殊相対論が「光速不変の原理」から，一般相対論が「等価原理」から構築されているように，物理の理論を作る際には単純かつ自然な仮定 (原理) が出発点となる．ビッグバン宇宙論は，宇宙は一様かつ等方であるという「宇宙原理」と，確立している諸物理法則をもとに構築されたものである．現実の宇宙には星・銀河・銀河団などの構造があり，一様でも等方でもないが，非常に大きなスケールでは物質分布が一様・等方であると考えるのは不自然なことではない．実際，きわめて等方的な宇宙マイクロ波背景放射が確認されたことをはじめ，構築されたビッグバン宇宙モデルが観測事実をよく説明することから，結果的に宇宙原理は良い仮定であったことになる．

幾何学的な考察から，一様・等方な 3 次元空間の計量は次の形に限定される．

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - {}^{(3)}R\,r^2/6} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2) \qquad (2.1)$$

ここで ${}^{(3)}R$ は 3 次元スカラー曲率で，任意定数であるが，通常はその符号 K ($K = 0, \pm 1$) と長さの次元をもつ正定数 a によって ${}^{(3)}R/6 \equiv K/a^2$ と表す．

曲率の符号 K によって，空間は 3 種類に分類される．$K = 0$ の場合は明らかに 3 次元ユークリッド空間になり，平坦な空間と呼ぶ．$K = \pm 1$ の場合の幾何学的な性質を見るためには，新しい動径座標

$$\chi = \int_0^r \frac{\mathrm{d}(r'/a)}{\sqrt{1 - K(r'/a)^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r & (K = +1) \\ r & (K = 0) \\ \sinh^{-1} r & (K = -1) \end{cases} \qquad (2.2)$$

を導入するのが便利である．計量は次のように書き直される．

$$\mathrm{d}l^2 = a^2[\mathrm{d}\chi^2 + r^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)] \tag{2.3}$$

それぞれの空間の特徴は，$\chi = 0$ を中心とする円を考え，その半径と円周の関係から大体理解することができる．半径 χ の円の円周は $2\pi r(\chi)$ であるが，$\sin\chi \leq \chi \leq \sinh\chi$ であるから，$K = +1$ の場合の円周は平坦の場合より短く，$K = -1$ の場合には長くなる．このことから，確かに K が曲率の符号に対応していることがわかる*.

時間方向も含めた 4 次元時空の計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a^2(t)[\mathrm{d}\chi^2 + r^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)] \tag{2.4}$$

と表され，ロバートソン-ウォーカー (Robertson-Walker：RW) 計量と呼ばれる．a はもともと空間座標によらない定数として導入されたが，いまは時間の関数 $a(t)$ となり，宇宙の大きさを表すスケール因子と呼ばれる．また，$a(t)$ が増加する場合には，$\chi =$ 一定，$\theta =$ 一定，$\varphi =$ 一定の点は互いに遠ざかり，膨

* 大域的な空間構造は，次のようにして理解することができる．まず，$K = +1$ の場合，式 (2.3) は 4 次元ユークリッド空間における半径 a の 3 次元球面，つまり

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = a^2 \tag{1}$$

を満たす 3 次元空間の計量と同形になっている．実際，この球面を極座標

$$X = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi, \quad Y = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi,$$
$$Z = a\sin\chi\cos\theta, \quad W = a\cos\chi \tag{2}$$

で表示すると，線素は

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2 + \mathrm{d}W^2 = a^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)] \tag{3}$$

となる．これは，全空間の体積が有限になるので閉じた空間といわれる．一方，$K = -1$ の場合は，閉じた空間のように 4 次元ユークリッド空間に埋め込むことはできず，直感的にイメージすることは難しい．しかし，4 次元ミンコフスキー時空の中の 3 次元双曲面

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - W^2 = a^2 \tag{4}$$

の計量と同形であり，やはり一様・等方であることがわかる．今度は

$$X = a\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi, \quad Y = a\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi,$$
$$Z = a\sinh\chi\cos\theta, \quad W = a\cosh\chi \tag{5}$$

という座標を導入すると，ミンコフスキー空間の線素は

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2 - \mathrm{d}W^2 = a^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2)] \tag{6}$$

となる．この場合，平坦な空間と同様に無限の体積をもつので，開いた空間と呼ばれる．

張する宇宙が記述される．そのような意味で，この χ (または r)，θ，φ を共動座標と呼ぶ．

2.2　ハッブルの法則

ハッブルは様々な銀河の光のスペクトルを調べ，1929 年に，遠方の銀河は距離に比例した速度でわれわれから遠ざかっていることを発表した．つまり，それぞれの銀河までの距離を D，後退速度を v とすると

$$v = H_0 D \tag{2.5}$$

が成り立つということである．これをハッブルの法則といい，比例係数 H_0 をハッブルパラメータという．以下に見るように，これは宇宙が RW 計量で記述されかつ膨張していること $(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t > 0)$ の最初の証拠であった．

ハッブルの法則を RW 計量 (2.4) から導いてみよう．まず，観測者の位置を原点とし，$\chi =$ 一定 にある銀河までの固有距離 $D_p = a\chi$ を考え，後退速度を $v \equiv \mathrm{d}D_p/\mathrm{d}t$ とすると，直ちに式 (2.5) が導かれる．ただし，ハッブルパラメータは

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_0, \quad (\dot{}\text{は}\ t\ \text{による微分，0 は現在値を表す添字}) \tag{2.6}$$

と定義される．ハッブルの法則の大まかな理解としてはこれでよいだろう．

しかし，実際の観測から定義される速度と距離は上記のものとは異なるので，以下ではそれを明らかにしよう．まず，天体の後退速度は光のドップラー効果の式から定義される．ミンコフスキー時空において光源が速度 v で遠ざかっているとき，光源での波長 λ_1 と観測される波長 λ_0 の関係は

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{2.7}$$

で与えられる．膨張宇宙はミンコフスキー時空ではないが，式 (2.7) で $(v/c)^2$ の項を無視した関係から後退速度を便宜的に定義するのである．

$$v = c\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1\right) \equiv cz \tag{2.8}$$

式 (2.7) または (2.8) から，光源が観測者から遠ざかるとき波長は長くなることがわかる．したがって，これを赤方偏移と呼び，式 (2.8) で定義される z を赤方偏移パラメータと呼ぶ．

なお，RW 計量で正しく赤方偏移を計算すると，次の関係が得られる*．

$$1+z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \tag{2.9}$$

この z は，天体の後退速度を表すと同時に天体までの距離の指標として用いられたり，また，宇宙の時刻を表すパラメータとして用いられる**．

距離についてはもう少し話が難しくなる．最も単純に定義できるのは，現在の時刻 t_0 における天体までの固有距離 $a(t_0)\chi_1$ である．しかし，ある天体を観測するとき，見えているものは過去の時刻 t_1 の姿であり，$t=t_0$ の姿を見ることは不可能である．したがって，現在のその天体までの固有距離を測定することも不可能である．そこで，観測的な立場からいくつかの距離が定義されているが，その中でも比較的よく用いられるのが光度距離である．

ミンコフスキー時空では，光源と観測者が距離 d 離れて互いに静止しているとき，絶対光度 L と見かけの光度 l の関係は $l=L/4\pi d^2$ と与えられる．光度距離とは，上の関係式を RW 時空に拡張し，絶対光度と見かけの光度から逆に

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \tag{2.10}$$

---

* 式 (2.9) の導出は以下のとおりである．遠方の天体 ($\chi=\chi_1$) から観測者 ($\chi=0$) まで $\theta=\varphi=$ 一定 の直線を伝搬する光を考えると，光の経路は

$$0=\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\chi^2 \tag{7}$$

で与えられる．光が光源を時刻 t_1 に発射して観測者に時刻 t_0 に到達すると，上の式を積分することにより

$$\chi_1=\int_{t_1}^{t_0}\frac{c\ \mathrm{d}t}{a(t)} \tag{8}$$

が得られる．同様に，1 周期後の光が時刻 $t_1+\delta t_1$ に発して時刻 $t_0+\delta t_0$ に受信されるとき

$$\chi_1=\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{c\ \mathrm{d}t}{a(t)} \tag{9}$$

が成り立つ．$a(t)$ の変化する時間 (宇宙年齢程度) に比べて光の周期は十分短いから，式 (9) から (8) を差し引くと

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)}=\frac{\delta t_1}{a(t_1)} \tag{10}$$

が得られる． 光の波長は周期に比例することから，光源での波長 λ_1 と観測される波長 Ω_Λ の関係として式 (2.9) が得られる

** $z>1$ のときに $v>c$ となることを，「宇宙膨張が光速を超える」と表現されることがある．しかし，もともと v は $v \ll c$ の近似式で便宜的に定義されたものにすぎないので，$v\sim c$ における数値にはあまり意味はなく，上記の表現は適切ではない．

と定義したものである．これを z で展開して表すと

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left\{z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \cdots\right\} \tag{2.11}$$

となる．ここで

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right)_0 \tag{2.12}$$

は減速パラメータと呼ばれる．式 (2.11) で z の 1 次までとると，ハッブルの法則 (2.5) と一致する．なお，ハッブルの法則は実は $z \ll 1$ のときの近似的関係であり，$z \gtrsim 1$ では成り立たないことも注意すべき点である．

ハッブルパラメータ H_0 の値を決定する最も基本的な方法は，ハッブルの法則を利用することである．天体の赤方偏移 z は光のスペクトルのずれから決まり，距離 d_L は絶対光度 L と見かけの光度 l から決まる．このうち単純に決めることができないのは絶対光度で，近傍の観測から性質がよく理解されている天体を標準光源として用いなければならない．

通常，明るさの変化から絶対光度が推定できるセファイド型変光星*およびIa型超新星** が標準光源として用いられる．それらの観測から推定される H_0 は，観測グループによって若干ばらつきはあるが

$$H_0 = 60 \sim 80\mathrm{km/s/Mpc} \tag{2.13}$$

の範囲で収束している[8,9]．また，重力レンズ効果*** を利用した測定も，その範囲の値を示している[10]．以下では，次のように定義される無次元量 h_{70} をしばしば用いる．

$$H_0 \equiv 70h_{70}\mathrm{km/s/Mpc} \tag{2.14}$$

---

* セファイド型変光星とは，膨張・収縮という振動によって明るさを変える脈動星の一種である．変光周期と絶対光度の間には強い相関がある．太陽の 1000〜10 万倍も明るく，スペースシャトルに搭載されたハッブル宇宙望遠鏡では，20Mpc 程度 (1Mpc= 3.262×10^6 光年 $= 3.086 \times 10^{20}$km) 離れたものまで観測できる．

** 超新星は，スペクトルの特徴から I 型と II 型に分類され，I 型はさらに Ia 型，Ib 型，Ic 型に細分される．Ia 型超新星は，白色矮星にガスが降り積もって爆発したものと考えられている．絶対高度のばらつきは小さく，しかも標準値からのずれが光度変化から推定できる．明るさは銀河 1 個並みで，$z \sim 1$ (1000Mpc 以上) まで観測されている (図 5.3)．

*** 重力レンズ効果とは，天体の重力源により光路を曲げる一般相対論的効果．銀河のレンズ効果によって，背後にあるクェーサーが 2 つ (以上) に見えることがある．2 つの光路長の差によりクェーサーの変光が観測される時刻に差が生ずるが，H_0 の決定にはこの時間差が用いられる．

2.3　アインシュタイン方程式

スケール因子 $a(t)$ の振る舞いは，アインシュタイン方程式

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.15}$$

を解くことによって決定される*．　ここで，$R^{\mu}{}_{\nu}$ はリッチテンソル，Λ は宇宙項，G はニュートンの重力定数である．$T^{\mu}{}_{\nu}$ はエネルギー運動量テンソルで，一様・等方性から次の完全流体の形に決まる．

$$T^{\mu}{}_{\nu} = P\delta^{\mu}{}_{\nu} + (P+\rho c^2)\frac{u^{\mu}u_{\nu}}{c^2} = \mathrm{diag}(-\rho c^2,\ P,\ P,\ P) \tag{2.16}$$

ただし，ρ は質量密度 (ρc^2 はエネルギー密度)，P は圧力で，いずれも空間の一様性から時間 t のみの関数となる．また，流体は共動座標系に対して静止しているので，4 元速度は $u^{\mu} = (c, 0, 0, 0)$ であり，その結果式 (2.16) の最後の成分表示が得られる．

このエネルギー運動量テンソルと RW 計量 (2.4) によってアインシュタイン方程式 (2.15) を書き下すと，次の 2 つの独立な方程式が得られる．

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \tag{2.17}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P) \tag{2.18}$$

特に，式 (2.17) をフリードマン (Freidmann) 方程式と呼ぶ．これら 2 つの方程式とは独立ではないが，エネルギー運動量保存則 $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$ から

$$(\rho c^2 a^3)^{\cdot} + P(a^3)^{\cdot} = 0 \tag{2.19}$$

が得られる．a^3 を体積と見ると，左辺第 1 項はその体積中のエネルギー変化 (dE) を表し，第 2 項は圧力による仕事 (PdV) を表すので，この式は熱力学第一法則 (エネルギー保存則) に対応していると解釈できる．力学変数は $a(t)$，$\rho(t)$，$P(t)$

---

* アインシュタインが導入した宇宙項を入れると

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R + \Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu}{}_{\nu} \tag{11}$$

となるが，この宇宙項は場の理論における真空のエネルギー $T^{\mu}{}_{\nu(\Lambda)} = -\rho_v\delta^{\mu}{}_{\nu} \equiv -(c^4/8\pi G)\Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu}$ と等価であるので，$T^{\mu}{}_{\nu}$ の一部と見なすことにする．ただし，慣例にならい $T^{\mu}{}_{\nu(\Lambda)}$ の部分を宇宙項と呼ぶ．

の3つなので，フリードマン方程式 (2.17) とエネルギー保存則 (2.19) に加えて状態方程式 $P = P(\rho)$ を与えれば方程式は閉じ，解を求めることができる．

フリードマン方程式 (2.17) から，宇宙の曲率の符号 K は質量密度 ρ とハッブル係数 H_0 で決まることがわかる．この関係をわかりやすく見るために，臨界密度 $\rho_{\rm cr}$ および密度パラメータ Ω を

$$\rho_{\rm cr} \equiv \frac{3c^2H^2}{8\pi G}, \quad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\rm cr}} \tag{2.20}$$

と定義すると，式 (2.17) から

$$\frac{Kc^2}{a^2H^2} = \Omega - 1 \tag{2.21}$$

が得られる*．Ω が1より大きいか小さいかによって曲率の符号が決まる．

われわれをとりまく主な物質は非相対論的 ($v \ll c$) であり，運動エネルギーは静止エネルギーに比べて十分小さい．したがって，圧力 P はエネルギー密度 ρc^2 に比べて無視できる．以下では，そのような普通の物質の量に添字 m をつけて表す．宇宙が $P_m = 0$ 物質のみからなる場合，エネルギー保存則 (2.19) から

$$\rho_m a^3 = \text{一定} \tag{2.22}$$

となり，フリードマン方程式 (2.17) の解は次のように求められる．

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{c\Omega_m}{2(\Omega_m - 1)^{\frac{3}{2}} H_0}(1 - \cos\xi), \quad t = \dfrac{\Omega_m}{2(\Omega_m - 1)^{\frac{3}{2}} H_0}(\xi - \sin\xi) & (K = +1) \\ \left(\dfrac{3H_0 t}{2}\right)^{\frac{2}{3}} & (K = 0) \\ \dfrac{c\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)^{\frac{3}{2}} H_0}(\cosh\xi - 1), \quad t = \dfrac{\Omega_m}{2(1 - \Omega_m)^{\frac{3}{2}} H_0}(\sinh\xi - \xi) & (K = -1) \end{cases} \tag{2.23}$$

$K = +1$ の場合，宇宙がある時期に膨張から収縮に転ずることを表している．

---

* 前頁の脚注で断ったことに対応して，密度パラメータ Ω は宇宙項も含むものとして定義していることに注意．混乱を避けるため，Ω の現在値を $\Omega_{\rm tot}$ と書くことにする．

フリードマンの解 (2.23) は最も標準的な宇宙モデルであり，古典ビッグバン宇宙論はこの解に基づいている．しかし，§5.4 で説明するように，最近では様々な観測結果から宇宙項を入れて考えるのが希でなくなってきた．宇宙項の特徴は，宇宙膨張を加速させる働きをもつことにあるが，それは以下のように減速パラメータを見れば明らかであろう．密度パラメータの物質成分および宇宙項成分を $\Omega_m \equiv (\rho_m/\rho_{\rm cr})_0$，$\Omega_\Lambda \equiv (\rho_\Lambda/\rho_{\rm cr})_0$ と定義すると，式 (2.18) から次の関係が得られる．

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \tag{2.24}$$

宇宙項がある場合，現在の様々な観測量は影響を受ける．しかし，$\Omega_m(t)/\Omega_\Lambda(t) \propto (1+z)^2$ の関係から，現在 $\Omega_m \sim \Omega_\Lambda$ でも $z > 2$ では $\Omega_m \gg \Omega_\Lambda$ となっているので，宇宙の進化の大部分は変わらないと思ってよい．

2.4　放射の宇宙

現在の宇宙を満たす放射*，つまり CMB のエネルギー密度は物質の密度の約 10 万分の 1 でしかない．しかし，宇宙の過去においてはこの関係は逆転し，宇宙膨張は放射によって支配されることになることが以下の議論からわかる．放射の量に添字 r を付けると，密度と圧力の関係は分布関数によらずに

$$P_r = \frac{\rho_r c^2}{3} \tag{2.25}$$

と与えられる**．これとエネルギー保存則 (2.19) から

$$\rho_r a^4 = 一定 \tag{2.26}$$

---

* 相対論的 ($v \cong c$) な運動をする粒子を放射または輻射と呼ぶ．現在の宇宙の放射は光子のみ (質量によってはニュートリノも) であるが，宇宙初期には多数の粒子が放射であった．

** 一般の粒子気体について，粒子の運動量を p，状態数を g，分布関数を $f(p)$ とすると，粒子の数密度 n は

$$\frac{{\rm d}n}{{\rm d}^3p} = \frac{g}{h^3} f(p) \tag{12}$$

によって与えられる．したがって，エネルギー密度と圧力は

$$\rho_r c^2 = \int \varepsilon {\rm d}n = \frac{g}{h^3}\int_0^\infty \varepsilon(p) f(p) 4\pi p^2 {\rm d}p \tag{13}$$

$$P_r = \int \frac{pv}{3}{\rm d}n = \frac{g}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2c^2}{3\varepsilon(p)} f(p) 4\pi p^2 {\rm d}p \tag{14}$$

と表される．ただし，$\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ は粒子のエネルギー，m は静止質量，$v = pc^2/\varepsilon$ は速度である．粒子が相対論的 ($\varepsilon \gg mc^2$) であるとき，$\varepsilon = pc$ とおくと式 (2.25) が得られる．

が得られる．物質のエネルギーが空間の体積に反比例して $\rho_r \propto a^{-3}$ で減少するのに対し，放射の場合はさらに，個々の粒子のエネルギーが $\propto a^{-1}$ の赤方偏移を受けて減少すると解釈できる．このことは，宇宙の過去において放射が優勢であったことを意味している．

放射優勢の初期宇宙では，光子数生成・消滅反応および物質との相互作用によって，熱平衡が成立していた．熱平衡の統計力学に従うと，物理的状態は次の分布関数からすべて導出される．

$$f(p) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} \pm 1} \tag{2.27}$$

ここで，μ は化学ポテンシャルで，$(+)$ はフェルミ粒子，$(-)$ はボーズ粒子に対応する．温度が十分に高い $(kT \gg \mu)$ とき，式 (13) は積分できて

$$\rho_r c^2 = \begin{cases} (4\pi^5/15c^3h^3)g(kT)^4 & (\text{ボーズ粒子}) \\ (7/8)(4\pi^5/15c^3h^3)g(kT)^4 & (\text{フェルミ粒子}) \end{cases} \tag{2.28}$$

となる．したがって，複数の種類の粒子が共存している系では，まとめて

$$\rho_r c^2 = \frac{4\pi^5}{15c^3h^3} g_*(kT)^4, \quad g_* = \sum_{i=\mathrm{fermion}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{j=\mathrm{boson}} g_j \tag{2.29}$$

と表される．式 (2.25) と (2.29) から，$T \propto 1/a$ という関係が得られる．

放射優勢から物質優勢になるときの温度は，$\rho_m = \rho_r$ とおくことによって求められる．

$$T_{\mathrm{eq}} = 3.2 \times 10^4 h_{70}^2 \Omega_m \ [\mathrm{K}] \tag{2.30}$$

ただし，$T_0 = 2.73\mathrm{K}$，$g_{*0} = 3.36$ (ニュートリノは 3 世代と仮定) とした．それ以前の宇宙膨張の様子は，フリードマン方程式 (2.17) で $\rho = \rho_r$，$K = 0$ とおいて得られる．

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \tag{2.31}$$

曲率項がゼロでない場合でも，放射優勢期では非常に小さいので無視してよい．式 (2.26) と (2.31) から温度と時刻の関係が得られる．

$$t = \frac{3.26}{\sqrt{g_*}} \left(\frac{10^{10}\mathrm{K}}{T} \right)^2 \ [\mathrm{s}] \tag{2.32}$$

ただし，これが成り立つのは放射粒子の自由度 g_* が一定の期間である．式 (2.32) は，宇宙は過去に遡るほど温度が高くなり，最初は火の玉のようであったことを表している．

2.5　宇宙マイクロ波背景放射

前節で，初期宇宙においては放射が熱平衡にあったと述べたが，それは光子の生成消滅反応および物質の電離反応によって実現していた．このうち前者の平衡は，$T \sim 1\text{keV} \sim 10^7\text{K}$ で凍結する．後者の平衡はその後も続くが，物質の大部分は水素であるから，平衡の破れる温度は次の電離反応

$$\mathrm{p} + \mathrm{e} \rightleftharpoons \mathrm{H} + \gamma \tag{2.33}$$

に対する化学平衡の式から求められる．

$$T_{\rm dec} \cong 3000\text{K} \quad (\text{このとき}\ t_{\rm dec} \cong 30\ \text{万年},\ z_{\rm dec} \cong 1000) \tag{2.34}$$

$T > T_{\rm dec}$ における宇宙は散乱作用により不透明 (光子がまっすぐに進まない) であるが，$T \cong T_{\rm dec}$ になると水素の中性化が起こり，光子と物質の相互作用が切れて透明になる．この現象を放射と物質の分離 (decoupling)，または宇宙の晴れ上がりという．

この高温の時代に放出された光子は，その後宇宙膨張によって温度は下がるが決して消えることはない．1948 年にガモフは，現在の宇宙が一様な黒体放射で満たされていることを予言した．そして 1965 年，ペンジアスとウィルソンは，あらゆる方角からやって来る 3K のマイクロ波放射を運よく検出したのである．これが宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) と呼ばれるもので，宇宙がかつて熱い火の玉であった証拠である．CMB が見つかる前は，ハッブルの法則を説明するもうひとつの理論として，宇宙は密度を一定に保ちながら膨張するという定常宇宙論があったが，CMB の発見によりビッグバン宇宙論に軍配が上がったのである．

ここで，現在の温度について少し説明しておく．CMB の温度は，温度 T だけを変数にもつプランク分布から決められる．しかし，熱平衡状態にない現在においてなぜプランク分布なのかという疑問も当然起こるだろう．宇宙の晴れ

上がった時刻 $t = t_{\rm dec}$ では，振動数が ν と $\nu + {\rm d}\nu$ の間にある光子数密度は，プランク分布

$$n_{\rm dec}(\nu_{\rm dec}){\rm d}\nu_{\rm dec} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu_{\rm dec}^2{\rm d}\nu_{\rm dec}}{\exp(h\nu_{\rm dec}/kT_{\rm dec}) - 1} \tag{2.35}$$

で与えられる．われわれに届くまでの間に振動数は宇宙膨張により赤方偏移を受け，$\nu_0 = (a_{\rm dec}/a_0)\nu_{\rm dec}$ と変化する．一方，単位共動座標体積あたりの光子数は保存するから

$$n_0(\nu_0){\rm d}\nu_0 = \left(\frac{a_{\rm dec}}{a_0}\right)^3 n_{\rm dec}(\nu_{\rm dec}){\rm d}\nu_{\rm dec} \tag{2.36}$$

が成り立つ．これらの式から

$$n(\nu_0){\rm d}\nu_0 = \frac{8\pi}{c^3}\frac{8\pi\nu_0^2{\rm d}\nu_0}{\exp(h\nu_0 a_0/a_{\rm dec}kT_{\rm dec}) - 1} \tag{2.37}$$

が得られる．ここで，現在の光子の温度を

$$T_0 \equiv \frac{a_{\rm dec}}{a_0}T_{\rm dec} \tag{2.38}$$

と定義すると，式 (2.37) はプランク分布を再現する式になっているのである．ただし，ここでの温度は便宜的に定義されたものであり，通常の熱平衡状態の温度ではないことを忘れてはならない．

3K の黒体スペクトルは，波長で約 1mm のところにピークをもつ．ペンジアスとウィルソンの観測は波長約 10cm の長波長（低周波）側だけであったが，その後約 30 年間様々な波長で観測され，ピークより短波長（高周波）側にかけてもプランク分布に合っていることがわかってきた．その決定版が，1989 年に NASA によって打ち上げられた宇宙背景放射探査衛星 (COBE) による観測である．COBE の遠赤外絶対分光計により幅広い波長について高精度の観測が行われ，CMB が完全な黒体であることが明らかにされた．そして，1998 年現在の測定値は次のようになっている[11)]．

$$T_0 = 2.725 \pm 0.002{\rm K} \tag{2.39}$$

さらに，COBE の微分マイクロ波分光計により，天空上の 2 点間の温度差がきわめて高い精度で測定され，1992 年には，温度揺らぎ $\delta T/T \cong 10^{-5}$ の発見が初めて報じられた[12)]．この発見は，ビッグバン宇宙論の検証以上の意味をもつ．CMB の温度揺らぎは $z_{\rm dec} \cong 1000$ の宇宙の姿を直接反映し，初期宇宙やダークマターの謎を解明する手掛かりになるからである．

2.6　ビッグバン元素合成

現在の宇宙の元素組成は，質量比にして約 75%が水素，約 24%がヘリウムで占められており，そのほかの元素はごく微量であることが観測から示されている．ところが，ビッグバン宇宙論では最初から水素以外の原子核が存在していたことはありえない．原子核から 1 個の核子を分離するのに必要なエネルギーは 5〜10MeV であるから，宇宙の温度が 10^{11}K 程度の頃には，陽子と中性子がばらばらの状態だったはずだからである．したがって，宇宙が膨張・冷却する際に起こる元素合成によって元素の組成を説明することが，ビッグバン宇宙論の重要なテストとなる．

元素合成は，重水素の合成から始まる．

$$\mathrm{p}+\mathrm{n} \rightleftharpoons \mathrm{D}+\gamma \tag{2.40}$$

この反応が起こる温度は，化学平衡の式から $T_{\mathrm{D}} \cong 0.1\mathrm{MeV} \cong 10^9\mathrm{K}$ と求められるが，バリオンと光子の数密度比 $\eta \equiv n_b/n_\gamma$ に依存している．D が作られるとすぐに次の核反応が起こり，ほとんどが ^{4}He になる．

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}+\mathrm{D} \rightarrow\ {}^3\mathrm{He}+\mathrm{n},\ {}^3\mathrm{He}+\mathrm{D} \rightarrow\ {}^4\mathrm{He}+\mathrm{p} \\ &\mathrm{D}+\mathrm{D} \rightarrow\ {}^3\mathrm{H}+\mathrm{p},\quad {}^3\mathrm{H}+\mathrm{D} \rightarrow\ {}^4\mathrm{He}+\mathrm{n} \end{aligned} \tag{2.41}$$

この時点で存在する主な元素は ^{1}H と ^{4}He であり，次の 2 体反応が起こるとしたら生成元素は質量数が 5 または 8 でなければならないが，そのような安定な原子核は存在しない．したがって，初期宇宙の元素合成では，最終的に ^{4}He より重い元素はほとんど生成されないのである．一方，星の内部の核反応では，高密度 (バリオン数密度が $n_b \gtrsim 10^{26}\mathrm{cm}^{-3}$) 状態が安定して続くので $3\,{}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C}$ の 3 体反応が起こり，最終的に鉄まで反応が進む．したがって，星の核反応ではヘリウムはほとんど残らないのである．

^{4}He は p と n が 1 対 1 の割合で構成されるので，仮に $T=T_{\mathrm{D}}$ のときに p と n が同数存在すれば，ほとんどすべてが ^{4}He となってしまう．ところが実際は数が異なるため，^{4}He の重量比は一般に

$$Y=\frac{2\ \min(n_{\mathrm{p}}, n_{\mathrm{n}})}{n_{\mathrm{p}}+n_{\mathrm{n}}} \tag{2.42}$$

となる．つまり，$T = T_{\mathrm{D}}$ のときの n/p 比で決まることになる．

n/p 比を求めるには，$T \geq T_{\mathrm{D}}$ ににおける 3 つの過程を考える必要がある．

- **熱平衡状態** ($T \gtrsim 1\mathrm{MeV} \sim 10^{10}\mathrm{K}$)

n と p は次のような弱い相互作用によって熱平衡状態を保っている．

$$\mathrm{n} \rightleftharpoons \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}, \quad \nu_{\mathrm{e}} + \mathrm{n} \rightleftharpoons \mathrm{p} + \mathrm{e}^-, \quad \mathrm{e}^+ + \mathrm{n} \rightleftharpoons \mathrm{p} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}} \tag{2.43}$$

化学ポテンシャルが無視できるとき，熱平衡条件から次の関係が得られる．

$$\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{p}}} = \mathrm{e}^{-\frac{Q}{kT}}, \quad Q \equiv (m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{p}})c^2 = 1.29\mathrm{MeV} \tag{2.44}$$

$kT \gg Q$ の間は $n_{\mathrm{n}} \cong n_{\mathrm{p}}$ であるが，温度が下がるにつれ n は減少する．

- **熱平衡の破れ** ($T \cong 1\mathrm{MeV}$)

仮に，化学反応 (2.43) がずっと熱平衡にあるとすれば，式 (2.44) に従って $n_{\mathrm{n}}/n_{\mathrm{p}}$ はほとんどゼロになってしまう．しかし実際には，その反応率 Γ が宇宙膨張の速さ H より小さくなると反応は起こらなくなり，p と n の数はほぼ凍結される．その温度は $T_f \cong 1\mathrm{MeV}$ と見積もられ，そのとき $n_{\mathrm{n}}/n_{\mathrm{p}} \cong 0.17$ となる．

- **n の自然崩壊** ($1\mathrm{MeV} \gtrsim T \gtrsim 0.1\mathrm{MeV}$)

$T_f > T > T_{\mathrm{D}}$ の間，n は β 崩壊により少しずつ減少する．半減期約 10.5 分で $T \cong T_{\mathrm{D}}$ まで β 崩壊が続くことにより，$n_{\mathrm{n}}/n_{\mathrm{p}} \cong 0.14$ となる．このとき，式 (2.42) より $^4\mathrm{He}$ の重量比は $Y \cong 0.24$ となり (詳しい値は図 5.1 を参照)，観測値に見事に一致する．なお，重水素 D やリチウム Li も微量ではあるが残る．

このように，$^4\mathrm{He}$ の存在量について観測と理論の「数値」が一致したことは，CMB の発見以上にビッグバン宇宙論の正当性を示す証拠ともいえるだろう．さらに重水素についても 1970 年代になってから詳しく研究され，星の進化の過程では壊されるだけで作られることはないことが明らかになった．現在の存在量 (水素の 10^{-5} 倍程度) を説明するには，やはりビッグバン元素合成理論しかないことになる．

元素合成理論はまた，CMB の場合と同様に，ビッグバン宇宙論を検証する以上の情報を与えてくれる．上に述べた過程を振り返ってみると，$^4\mathrm{He}$ およびそのほかの軽元素の組成比は結局，反応 (2.43) の平衡が破れる温度 T_f，重水素合成の始まる温度 T_{D}，そして中性子の寿命によって決定される．そのうち T_f

は，$H_f^2 \propto \rho_r \propto g_* T_f^4$ の関係を通じて g_* に依存しており，軽元素の存在量からニュートリノの世代数 N_ν にまで制限がつけられることになる．最近の重水素の観測からは $N_\nu < 3.20$ という制限が報告されており[13]，素粒子の標準理論と整合的になっている．さらに，先に述べたように $T_{\rm D}$ が η で決まることから，軽元素の観測量からバリオン密度 ρ_b に制限がつけられる．これについては §5.2 で解説する．

2.7　ビッグバン宇宙論の諸問題

古典ビッグバン宇宙論は，ハッブルの膨張則，CMB の存在，軽元素の組成という観測事実を見事に説明し，確立した理論となっているが，以下に説明するような未解決の問題が残されている．また，§3.4 で述べるバリオン非対称の問題やモノポール問題，§5.1 で述べるダークマター問題も，ビッグバン宇宙論の問題として捉えることができる．それらはしかし，ビッグバン宇宙論に欠陥があることを意味するのではなく，誕生直後の宇宙の進化に謎を解く鍵があると考えられている．

A．地平線問題

粒子の地平線とは，宇宙開闢時に出発した光がある時刻 t までに到達する地点として定義され，その内側が因果関係をもちうる領域という意味をもつ．つまり，光の軌道の式 $c\,\mathrm{d}t = a(t)\mathrm{d}\chi$ を満たす時空点の集合であり，中心からの固有距離は

$$d_H \equiv a(t)\chi_H(t) \equiv a(t)\int_0^t \frac{c\,\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{2.45}$$

である．一般に，スケール因子が $a(t) \propto t^p$ で与えられるときの粒子の地平線は，$p < 1$ ならば

$$d_H = \frac{ct}{1-p} \tag{2.46}$$

となり，特に平坦で宇宙項ゼロの宇宙 $(a(t) \propto t^{2/3})$ では $d_H = 3ct_0$ になる*．以下では，この場合に限定して話を進める．

---

* 正確には，$t < t_{\rm eq}$ の物質優勢になる前の宇宙の進化も考慮に入れなければならない．$t = 0$ からずっと放射優勢 $(a(t) \propto t^{1/2})$ であるならば，$t < t_{\rm eq}$ における地平線は $d_H = 2ct_{\rm eq}$ であり，この場合は無視できる．一方，第 4 章で紹介するインフレーションモデルではこの時期の振る舞いが大きく変わるため，ここでの議論は適用できず，結果的に地平線問題が解決される．

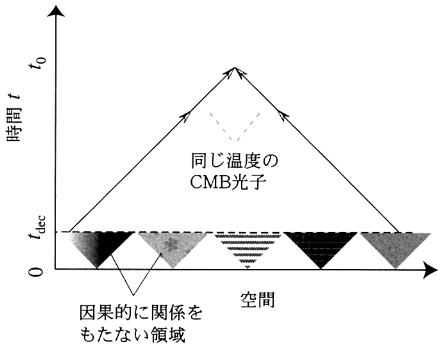


図 2.1　地平線問題

CMB の等方性は，晴れ上がりの時刻 $t_{\rm dec}$ において宇宙がきわめて一様・等方であったことを示している．ところが，この時刻の地平線に囲まれる円の直径は現在 $2d_H(t_{\rm dec})a(t_0)/a(t_{\rm dec})$ であり，その視直径はわずかに

$$\theta_H = \frac{2d_H(t_{\rm dec})a(t_0)}{2d_H(t_0)a(t_{\rm dec})} = \frac{1}{\sqrt{1+z_{\rm dec}}}\ {\rm rad} \cong 2\ 度 \tag{2.47}$$

に過ぎないのである．つまり，図 2.1 に示したように，因果関係をもちうる領域よりはるかに大きい領域が一様に観測されていることになる．これが地平線問題である．

B.　平坦性問題

平坦性問題とは，なぜ Ω が 1 に近いのかという謎である．これがなぜ謎なのかということは，Ω で書いたフリードマン方程式 (2.21) からすぐにわかる．物質優勢期も放射優勢期も宇宙は減速膨張するから*，式 (2.21) の左辺の絶対値は時間的に増加する．図 2.2 に示したように，$\Omega = 1$ は力学系の不安定平衡点に相当し，Ω が 1 より少しでも大きいとすぐに発散し，小さいとすぐにゼロに近づくのである．したがって，初めに Ω をきわめて 1 に近く選んでおかなければ現在の宇宙が実現されないのである．

では，具体的に過去においてどの程度 1 に近くなければならないのだろうか．それは，フリードマン方程式から求めることができる．現在 $\Omega_m = 0.1 \sim 1$

*§2.3 の最後に説明したように，宇宙項があって現在加速膨張していたとしても，それは $z \lesssim 1$ の間だけに過ぎないので，ここでの議論は変わらない．

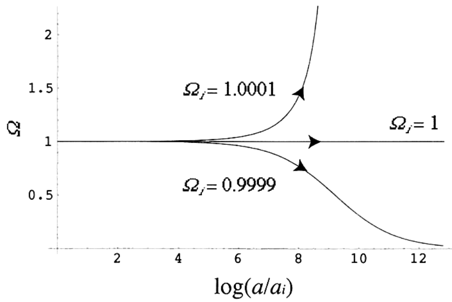


図 2.2　平坦性問題．物質優勢の解 (2.23) に基づいて描いた

であるためには，宇宙の再結合時で $|1-\Omega_{\rm dec}| \lesssim 10^{-2}$，元素合成の時期で $|1-\Omega_{\rm D}| \lesssim 10^{-16}$，プランク時 $t_{\rm Pl} \sim 10^{-43}$s ではなんと $|1-\Omega_{\rm Pl}| \lesssim 10^{-58}$ でなければならないのである．

C．密度揺らぎの起源・成長の問題

銀河，銀河団などの構造は，初期の密度揺らぎの重力的な成長により形成されたと考えられているが，そのためには，きわめてわずかな揺らぎをもつ物質分布を初期に与えなければならない．その揺らぎの起源は何か，というのが大きな問題である．これは，上述の地平線・平坦性問題と併せてビッグバン宇宙の初期条件の問題であり，それらを解決する唯一の理論がインフレーション宇宙論なのである．

揺らぎの起源の問題とは独立に，揺らぎが成長して構造が形成される過程も明らかではない．以下のように，単純なシナリオではうまくいかないのである．密度揺らぎ $\delta(t,\boldsymbol{x})$ は，空間的に非一様な密度 $\rho(t,\boldsymbol{x})$ の平均密度 $\bar{\rho}(t)$ からのずれとして

$$\rho(t,\boldsymbol{x}) = \bar{\rho}(t)(1+\delta(t,\boldsymbol{x})) \tag{2.48}$$

と定義される．$\delta < 1$ として δ の 2 次以上を無視する線形摂動で流体方程式を解析すると，物質優勢期 $(\rho=\rho_m)$ の $\Omega_m = 1$ の解は，$\delta = D(\boldsymbol{x})t^{2/3}$ と求められ，宇宙の晴れ上がりのときの揺らぎとの関係は

$$\delta_0 = (1+z_{\rm dec})\delta_{\rm dec} \cong 10^3 \delta_{\rm dec} \tag{2.49}$$

となる．物質の主成分がバリオンであるとすると，放射と電磁相互作用で結び

ついているために $\delta_{\rm dec} \sim 10^{-5}$ でなければならず，式 (2.49) から $\delta_0 \sim 10^{-2}$ となってしまう．これでは現在の構造を到底作ることはできない．これが揺らぎの成長の最も基本的な問題であり，非バリオンダークマターが必要とされる理由である．

3章 素粒子論と宇宙論

3.1 素粒子の標準理論

ビッグバン宇宙論によって元素合成 ($t \sim 1$s，$T \sim 10^{10}$K) 以降の宇宙の進化は明らかになったが，このモデルはさらに過去に向かってどこまで拡張できるのだろうか．核子 (陽子・中性子) の広がりは $\sim 10^{-13}$cm であるから，単純に見積もっても温度が 10^{16}K 程度になると重なり合ってしまう．核子を基本粒子とする考え方では流体近似が破れ，それより過去の宇宙は未知の世界となる．

1970 年代に完成した素粒子の標準理論は，それ以前の宇宙を議論することを可能にした．核子は素粒子ではなく，3 つのクォークが強い相互作用で結びついている状態とするクォークモデルが提唱され，実験により支持されている．10^{13}K もの高温になると核子はクォークに分解するが，クォークは点粒子であり，しかも強い相互作用には漸近的自由性という近距離で弱くなる性質があるので，理想流体の方程式がどこまでも適用できるのである．

表 3.1 に，標準理論における基本粒子の構成を示した．クォークは，世代と電荷によって 6 種類に分けられる．そして，強い相互作用が働くことにかかわるカラーという 3 つの自由度があるので，併せて 18 種類になる．さらに，それぞれの粒子について，電荷などの量子数の符号が反対で質量とスピンが同じ反粒子が存在する．クォークは直接観測にかからず，現在の宇宙ではバリオンまたは中間子として存在している．バリオンは異なるカラーをもつ 3 つのクォークから構成される粒子で，陽子や中性子がこれに属する．中間子はクォーク・反クォークからなる粒子で，π 粒子などが属している．

物質を構成する粒子には，クォークのほかにレプトンがある．世代と電荷による分類はクォークと同様である．クォークとの主な違いは，カラーの自由度

表 3.1　標準理論の素粒子

物質を構成するフェルミ粒子 (スピン 1/2)

	世代 1	世代 2	世代 3	電荷	弱い力	強い力
クォーク	アップ (u)	チャーム (c)	トップ (t)	2/3	○	○
	ダウン (d)	ストレンジ (s)	ボトム (b)	−1/3	○	○
レプトン	電子ニュートリノ (ν_e)	ミューニュートリノ (ν_μ)	タウニュートリノ (ν_τ)	0	○	×
	電子 (e)	ミュー粒子 (μ)	τ タウ粒子 (τ)	−1	○	×

力を媒介するゲージ粒子

相互作用	ゲージ粒子	電荷	スピン
電磁力	光子 (γ)	0	1
弱い力	W ボソン ($W^{\pm}$)	±1	1
	Z ボソン (Z^0)	0	1
強い力	グルオン (g)	0	1
重力	重力子 (G)	0	2

質量の起源となるヒッグス粒子

ヒッグス粒子	電荷	スピン
ϕ^+	1	0
ϕ^0	0	0

がなく強い相互作用が働かないこと，それゆえ現在の宇宙で単独で存在し直接観測にかかる粒子であることである．電子やニュートリノなどがこれに属する．なお，クォーク・レプトンはスピン 1/2 のフェルミ粒子である．

標準理論における基本粒子は，物質を構成するクォーク・レプトンのほかに，力を媒介するゲージ粒子，そして質量の起源となるヒッグス (Higgs) 粒子がある．標準理論とは，単に素粒子を現象論的に分類したものではない．粒子間に働く相互作用には，重力，電磁力，弱い力，強い力の 4 種類があるが，重力以外の 3 つの相互作用を統一的に記述したことが最大の特長である．そして，その理論形式はゲージ理論とヒッグス機構が柱となっている．以下の §3.2 および §3.3 では，それぞれの理論の枠組みを解説する．

3.2　ゲージ理論

ゲージ理論の思想を一言でいえば，対称性の概念をどんどん拡張していくということになるだろう．対称性とは場の変数変換に対する不変性のことであるが，物理的な保存量と関係して様々な物理法則に現れる．例えば，質点系の力学では回転対称性から角運動保存則が導かれるというように，対称性から保存則を導出することができる．しかし，対称性のもつより重要な特長は，以下に見るように，新たな理論を構築する際の指針を与えることである．

初めに，ゲージ理論として最初に成功を収めた電磁相互作用を取り上げよう．ディラック場 ψ のラグランジアン

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (\gamma^\mu \text{はディラック行列}) \tag{3.1}$$

を考える．これは，θ を定数とする位相変換

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{i\theta} \psi \tag{3.2}$$

に対して不変であり，この対称性から電荷保存則が導かれる．

いま，位相変換 (3.2) において θ を定数としたが，これは大域的変換といわれ，宇宙全体の過去から未来まですべての時空点の位相を一斉に変える変換を意味する．変換をこのように限定するのは不自然であり，位相 θ を時空の任意関数 $\theta(x)$ にした対称性を要請すべきである，というのがゲージ理論の立場である．このような変換を局所ゲージ変換と呼ぶ．ところが，その変換をラグランジアン (3.1) に施してみると，$\partial_\mu \theta(x)$ を含む項が現れるために，ラグランジアンは不変にはならない．そこで，対称性を優先してラグランジアンの方を変えてしまうのである．

具体的には，ベクトル場 A_μ を導入し，共変微分 D_μ および位相変換に伴う A_μ の変換を次のように定義する．

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu \quad (g \text{は定数}), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \tag{3.3}$$

こうして，微分 ∂_μ を共変微分 D_μ で置き換えたラグランジアンは局所ゲージ不変となり，$g\gamma^\mu A_\mu \bar{\psi}\psi$ というディラック場とゲージ場の相互作用項が現れるのである．さらに，A_μ の運動方程式を導くゲージ不変なラグランジアンが自然に

導入される．

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.4}$$

これはマクスウェル方程式を導く電磁力のラグランジアンと一致し，$\mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A$ はフェルミ粒子と相互作用する電磁場の理論になっている．この A_μ のように，ゲージ不変性を保つために導入される場を一般にゲージ場と呼ぶ．

次に，ゲージ理論をほかの相互作用に適用するために，ゲージ対称性の考え方を異なる粒子を混ぜるような変換に拡張する．つまり，ψ を n 個のスピノール場の組

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

とし，場を混合する SU(n) ユニタリ変換

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi, \quad U \equiv \mathrm{e}^{i\theta^a T^a} \quad (a = 1, \cdots, n^2 - 1) \tag{3.6}$$

を考えるのである．ここで U は $n \times n$ ユニタリ行列であり，T^a はその無限小変換の生成元で $n \times n$ エルミート行列である．局所ゲージ不変性を要請すれば，上記の場合と同様にゲージ場 A^a_μ $(a = 1, \cdots, n^2 - 1)$ が導入され，相互作用を記述するラグランジアンが導かれるのである．

標準理論では，素粒子の対称性を表す群として G=SU(3)×SU(2)×U(1) を考える．この群によって変換される場の組を，表 3.2 に示した．クォークの添字 r, g, b はカラーの赤，緑，青を表し，SU(3) はその 3 種類のカラーの組に作用する．このとき導入されるゲージ場に対応する粒子がグルオンで，強い力を媒介する粒子となる．このような SU(3) ゲージに基づく強い相互作用の理論を量子色力学 (QCD) という．

U(1) 変換はすべてのフェルミ粒子に作用する．ただし，この U(1) ゲージは電磁場に直接対応しているわけではなく，群 SU(2)×U(1) によって弱い力と電磁力がまとめて記述される．これをワインバーグ-サラム (Weinberg-Salam: WS) 理論という[14)]．SU(2) は 2 種類のレプトンやクォークの組に作用してそれらを混合する変換であるが，少し注意が必要である．

表 3.2　SU(3)×SU(2)×U(1) ゲージ群

変換群と対応する粒子の組 (U(1) はすべての粒子に作用)

	SU(3)	SU(3)	SU(3)
SU(2)	$\begin{pmatrix} \mathrm{u^r} & \mathrm{u^g} & \mathrm{u^b} \\ \mathrm{d^r} & \mathrm{d^g} & \mathrm{d^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{c^r} & \mathrm{c^g} & \mathrm{c^b} \\ \mathrm{s^r} & \mathrm{s^g} & \mathrm{s^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{t^r} & \mathrm{t^g} & \mathrm{t^b} \\ \mathrm{b^r} & \mathrm{b^g} & \mathrm{b^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$
	$\begin{pmatrix} \mathrm{u^r} & \mathrm{u^g} & \mathrm{u^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$ $\begin{pmatrix} \mathrm{d^r} & \mathrm{d^g} & \mathrm{d^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{c^r} & \mathrm{c^g} & \mathrm{c^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$ $\begin{pmatrix} \mathrm{s^r} & \mathrm{s^g} & \mathrm{s^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{t^r} & \mathrm{t^g} & \mathrm{t^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$ $\begin{pmatrix} \mathrm{b^r} & \mathrm{b^g} & \mathrm{b^b} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$

SU(2)	$\begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \nu_{\mathrm{e}} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_{\mu} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$
	e_{R}	μ_{R}	τ_{R}

ゲージ場と結合定数

群	ゲージ場	結合定数
SU(3)	G_μ^a $(a = 1 \sim 8)$	g_3
SU(2)	W_μ^a $(a = 1 \sim 3)$	g_2
U(1)	B_μ	g_1

一般に，フェルミ粒子を表すスピノール場は，スピンの進行方向成分が正の状態 (右巻) と負の状態 (左巻) に分解することができる．

$$\psi = \psi_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{R}}, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_{\mathrm{L}} = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \tag{3.7}$$

ここで，e と ν_{e} を組にして SU(2) 対称性を要請すると，β 崩壊などの現象を説明することができるのだが，ニュートリノは左巻成分しかもっていないことが実験的にわかっている．したがって，e の右巻成分はペアを作ることができない．この理由で，SU(2) はすべてのフェルミ粒子の左巻成分のみに作用する変換とされるのである．WS 理論の重要な点は，この統一された場から，長距離力の電磁力と短距離力の弱い力が導き出されることであるが，そのメカニズムが次節で説明するヒッグス機構になる．

最後に，フェルミ粒子と 3 種類のゲージ場の相互作用を表す．

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \tag{3.8}$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_1\frac{Y}{2}B_\mu - ig_2\frac{1-\gamma_5}{2}W_\mu - ig_3 G_\mu \tag{3.9}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad W_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig_2[W_\mu, W_\nu],$$
$$G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig_3[G_\mu, G_\nu] \tag{3.10}$$

ただし，ゲージ場 W_μ^a と G_μ^a は，$W_\mu \equiv W_\mu^a T^a$ のように群の生成元で縮約して表している．Y はハイパーチャージという量子数の 1 つで，粒子固有の値をとる．g_1，g_2，g_3 は各相互作用の強さを表す結合定数で，実験から決定すべき値である．

3.3　ヒッグス機構と宇宙の相転移

ゲージ理論の思想に従って，3 つのの相互作用の形を決めることができたが，式 (3.8) の理論ではまだ現実の現象を説明することはできない．ゲージ場が短距離力となるためには，$(m^2/2)W_\mu W^\mu$ のような質量項が必要であるが*，それがないために短距離力である弱い相互作用が表現されない．ところが，ラグランジアンに初めから質量項 $(m^2/2)W_\mu W^\mu$ を入れておくと，ゲージ対称性を破ってしまう．そこで，ゲージ対称性を破ることなく実験に一致する質量を導くために考案されたのが，以下に述べるヒッグス機構である．また，クォーク・レプトンにも質量を与えることも，ヒッグス機構の重要な特長である．

まず，SU(2) の変換を受ける複素スカラー場 $\phi = (\phi^+, \phi^0)$ を新たに導入する．このスカラー場はヒッグス場と呼ばれ，ゲージ不変なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) \tag{3.11}$$

で与えられる．ここで，ヒッグス場のポテンシャルを

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 - \frac{1}{2}\mu^2|\phi|^2 \tag{3.12}$$

と選ぶと，図 3.1 のように $|\phi| = v \equiv \mu/\sqrt{\lambda}$ で最小になり，真空期待値は例えば $\phi = (0, v)$ のようにある位相に固定される．すると，ラグランジアンは形式的に SU(2) 対称の形をとりながら，実現する真空の状態がゲージ不変性を破るのである．これを自発的対称性の破れと呼ぶ．

---

* このことは，クライン-ゴルドン (Klein-Goldon) 方程式 $(\Box - m^2)\phi = 0$ の解が $\phi = \mathrm{e}^{-mr}/r$ という形になることから理解されよう．m がゼロでなければ，場が有効に作用する範囲が $r < 1/m$ となるが，m がゼロであると，$1/r$ の形で無限遠まで作用が及ぶ．

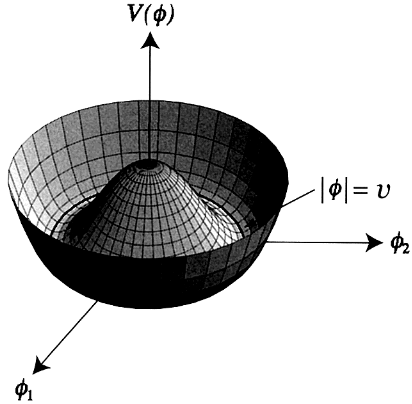


図 3.1　ヒッグス場のポテンシャル．WS 理論のヒッグス場は複素二重項であり 4 成分をもつが，5 次元的な図は表現できないので 2 成分を落として描いている

ヒッグス場がゼロでない値をとると，式 (3.11) と (3.9) の形から，ゲージ場の質量項が現れそうなことは容易に想像できるだろう．実際に計算すると，新たに定義したゲージ場

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm W_\mu^2), \quad Z_\mu \equiv -\cos\theta_{\rm W} W_\mu^3 + \sin\theta_{\rm W} B_\mu \tag{3.13}$$

が質量項をもつことが示される．ここで，$\theta_{\rm W}$ はワインバーグ角と呼ばれる量で，$\tan\theta_{\rm W} \equiv g_1/g_2$ と定義される．これに対応する粒子が表 3.1 の $\rm W^\pm$ と Z であり，弱い相互作用を媒介する粒子となるのである．さらに，残りのゲージ場

$$A_\mu \equiv \cos\theta_{\rm W} B_\mu + \sin\theta_{\rm W} W_\mu^3 \tag{3.14}$$

は依然として U(1) 対称性をもち，電磁場も見事に出現する．

先に述べたように，ヒッグス場の重要な役割はもうひとつある．フェルミ粒子との相互作用として最も単純な $\phi\bar{\psi}\psi$ の形を仮定すると (これを湯川相互作用という)，ϕ がゼロでない値に固定されることにより ψ の質量項が現れる．つまり，ヒッグス場はゲージ粒子だけでなくフェルミ粒子にも質量を与えるのである．

さて，ビッグバン宇宙論によれば宇宙初期は非常に高温であった．温度の影響によってヒッグス場の振る舞いはどうなるだろうか．熱力学的な考察から，

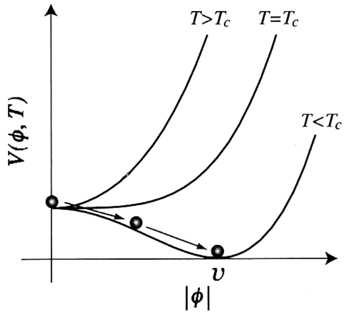


図 3.2　相転移による自発的対称性の破れ

ヒッグス場は自由エネルギーを最小になるような値を期待値にとらなければならず，有限温度における有効ポテンシャルは

$$V_{\mathrm{eff}}(\phi, T) = V(\phi) + \frac{1}{24} m_*^2 T^2 - \frac{\pi^2}{20} g_* T^4 \tag{3.15}$$

と導かれる[6)]．ここで．g_* は式 (2.29) で定義された粒子の状態数に対応する量であり，m_* は各粒子の質量から

$$m_*^2 = \sum_{i=\mathrm{fermion}} m_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=\mathrm{boson}} m_j^2 \tag{3.16}$$

と定義される．この中で，例えばヒッグス場自身の質量項は

$$m_{\mathrm{Higgs}}^2 \equiv \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} = 3\lambda\phi^2 - \mu^2 \tag{3.17}$$

となる．このように，すべての粒子の寄与をすべて足しあげると有効ポテンシャルは決まり，温度によって図 3.2 のように変化することがわかる．

臨界温度を T_{WS} と書くと，$T > T_{\mathrm{WS}}$ で真空期待値 $\phi = 0$ であったものが，$T < T_{\mathrm{WS}}$ になると $|\phi| = v$ に突然移動する．このような変化を一般に真空の相転移または宇宙の相転移といい，今考えている SU(2)×U(1) から U(1) へ対称性が破れる相転移を WS 相転移と呼ぶ．WS 相転移が起こる温度は $T_{\mathrm{WS}} \sim 100\mathrm{GeV}$ と推定されている．

WS 理論は，1973 年のスイスのヨーロッパ原子力共同研究所 (CERN) における Z^0 粒子の発見によって証明され，QCD と併せて標準理論を構成している．

3.4　標準理論を超えて

SU(3)×SU(2)×U(1) ゲージ対称性に基づく標準理論は美しく，多くの実験事実を見事に説明する．しかし，ヒッグス場をいきなり書き下すという処方や任意パラメータの多さは，とても最終理論とは考えられない．部分的に修正したり，より統一的な理論へ拡張することが必要とされている．そのような標準理論を超えた理論の中で宇宙論研究に影響を与えたものを，以下に紹介する．AからDまで並べたが，標準理論の部分的な修正から大幅な拡張まで様々である．

A．ニュートリノ振動

表3.2では，例えばクォークの (u, d) が弱い相互作用のSU(2) 二重項を形成するように書いたが，実は厳密には正しくない．中間子の崩壊には s→u のような世代を越えた反応が検出されているが，異なる世代の粒子を混合する変換がなければ記述できないからである．そこで，二重項の選び方を換えて (u,d′), (c,s′)，(t,b′) と書き，相互作用の固有状態 d′，s′，b′ を質量固有状態*d，s，b の混合状態として

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}' \\ \mathrm{s}' \\ \mathrm{b}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \qquad (3.18)$$

と与える．ここで，M は3行3列の行列であり，小林と益川によって導入されたことからKM行列と呼ばれる．理論的には，SU(2) 二重項と質量固有状態が一致する必然性はなく，むしろそのずれが小さい (M が単位行列に近い) ことの方が謎といえよう．このクォーク混合の理論は実験によって検証され，標準理論に含まれている．

同じような現象は，同じSU(2) 二重項をなすニュートリノにも起こることが予想される．ただし，ニュートリノの質量がゼロである場合には，質量の固有状態というのが存在せず，混合に相当する現象はない．標準理論では，質量ゼロとしても矛盾がないことから，最も単純に質量ゼロとされていたのである．しかし，加速器実験からは[15)]

---

* 単に u, d などと表した状態は，湯川項によって一定の質量を得ることから質量固有状態と呼ばれる．一方，SU(2) 二重項を形成する状態を弱い相互作用の固有状態と呼ぶ．実験で粒子として確認されるのは，一定の質量をもつ状態である．

$$m_{\nu_e} \lesssim 10\text{eV}, \quad m_{\nu_\mu} < 0.17\text{MeV}, \quad m_{\nu_\tau} < 18.2\text{MeV} \tag{3.19}$$

と質量の上限しか与えられてなく，この範囲でゼロでない値をもつ可能性が残されていた．それゆえ，存在が確認されている粒子の中で唯一のダークマター候補とされていたのである．

ニュートリノに質量があれば，質量固有状態と弱い相互作用の固有状態は一般に異なり，飛行中に別のニュートリノに変化するというニュートリノ振動が起こる．ν_e と ν_μ の混合を例にとると，質量の固有状態を ν_1，ν_2 それぞれの質量を m_1，m_2 とすれば，相互作用の固有状態 ν_e，ν_μ は

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

と表される．ここで θ を混合角という．ν_e として発生したニュートリノが距離 L 進んだときに ν_μ に変わっている確率は，シュレーディンガー方程式を解いて

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right), \quad \Delta m^2 \equiv |m_2^2 - m_1^2| \tag{3.21}$$

と求められる．ここで E はニュートリノのエネルギーである．ニュートリノ振動発見のニュースについては，§5.6 で紹介する．

B. 強い CP 問題とアクシオン

強い相互作用を記述する QCD では，空間反転 (P) と粒子・反粒子の入れ替え (C) を同時に行う CP 変換に対して不変にならない非摂動解が存在する．この解の存在は，ラグランジアンに運動方程式を変化させない項

$$\mathcal{L} = \frac{\theta_{\text{QCD}}}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F^a_{\mu\nu} F^a_{\alpha\beta} \tag{3.22}$$

をつけ加えることと同等であるが，この項が CP 変換に対して不変ではないことはすぐに確かめられるだろう．ここで，θ_{QCD} は任意パラメータである．一方，実験的にはこの CP 不変性はよく保たれていて，中性子の双極子モーメントの観測から $|\theta_{\text{QCD}}| < 10^{-9}$ という制限が得られている．この理論と観測の矛盾を強い相互作用における CP 問題，あるいは単に強い CP 問題という．

ペッチャイ (Peccei) とクイン (Quinn) は，標準理論を少し拡張することによって強い CP 問題が解決されることを示した．新しいヒッグス場を導入し，

表 3.3　標準理論に現れるパラメータ

ゲージ群	種類	記号または個数
SU(3)	結合定数	g_3
SU(2)×U(1)	結合定数	g_1，g_2
	ヒッグス項	λ，μ
	湯川項	e,μ,τ,u,d,c,s,t,b に対して計 9 個
	KM 行列	独立な成分が 4 個

大域的軸性 U(1) 対称性を要請すると，ヒッグス機構により基底状態として実質的に $\theta_{\rm QCD}=0$ が実現されるのである．さらに，ヒッグス場の位相の自由度から導入される擬スカラー場 a のポテンシャルは極小値近傍で $V_a=(1/2)m_a^2a^2$ となり，質量 m_a の新しい粒子が現れる．この粒子はアクシオンと呼ばれ，ダークマターの候補のひとつとなっている．

C. 大統一理論

WS 理論は電磁力と弱い力が $T_{\rm WS}\sim 100{\rm GeV}$ で 1 つになることを示し，電弱統一理論として成功を収めたが，必然的に，次の関心は強い力も含む大統一理論 (GUT) に移る．また，表 3.3 に示したように，標準理論に現れるパラメータは全部で 18 個あり，とても最終理論とは考えられない．このことも，より基本的な理論を探求する動機となっている．

3 つの力を統一する上で重要なのは，力の大きさを特徴づける (無次元化された) 結合定数である．

$$\alpha_1\equiv\frac{g_1^2}{4\pi\hbar c}=\frac{\alpha}{\cos^2\theta_{\rm W}}\sim\frac{1}{100},\ \ \alpha_2\equiv\frac{g_2^2}{4\pi\hbar c}=\frac{\alpha}{\sin^2\theta_{\rm W}}\sim\frac{1}{30},\ \ \alpha_3\equiv\frac{g_3^2}{4\pi\hbar c}\sim 1 \tag{3.23}$$

ここで，$\alpha\equiv e^2/(4\pi\hbar c)\cong 1/137$ は微細構造定数である．これらの値は異なっているが，実は結合定数は定数でなくエネルギーに依存して変化する．その変化の様子から，3 つの結合定数は $T_{\rm GUT}\sim 10^{16}{\rm GeV}$ の辺りで一致し，そこで 3 つの力が統一されると予想されたのである．

GUT のゲージ群は標準理論の SU(3)×SU(2)×U(1) を部分群として含むものでなければならない，というほかには理論的制限はなく，様々な可能性がある．1974 年には，ジョージアイ (Georgi)・グラショー (Glashow) によって，最も

単純なSU(5) 群によるモデルが提案された．このモデルでは，各世代ごとに3カラーのクォークと2種類のレプトンが組となってSU(5) 変換を受けるため，クォークとレプトンの混合が起こるという特徴がある．つまり，陽子が陽電子と中間子に変化する反応

$$\mathrm{p} \to \mathrm{e}^+ + \pi^0 \tag{3.24}$$

いわゆる陽子崩壊が起こることを予言するのである．

岐阜県神岡鉱山のカミオカンデは，陽子崩壊探索および宇宙ニュートリノ観測を目的として建設された，水4500トンを備えた観測装置である．1983年から10年以上陽子崩壊の観測が行われたが，1例も見つからず，SU(5) モデルで予言される陽子寿命 (約10^{31}年) と矛盾する結果が出た．つまり，SU(5) モデルは否定されてしまったのである．しかし，大統一理論のアイデアが否定されたわけではなく，より大きい対称性をもつSO(10) モデルや，次に紹介する超対称性を導入したモデルが，GUT を実現する次の候補として研究されている．

D．超対称性理論

標準理論や大統一理論を構築する手続きとして重要だったのは，異なる粒子間に対称性を要請したことであった．その考え方を拡張して

$$\text{フェルミ粒子} \Longleftrightarrow \text{ボーズ粒子}$$

という対称性を要請した理論を超対称性理論という．超対称性理論では，各素粒子に対してスピンが1/2 だけ異なった相棒 (超対称パートナー) が存在する．つまり，すべてのフェルミ粒子にはボーズ粒子の，ボーズ粒子にはフェルミ粒子の超対称パートナーが存在するのである．ただし，既知の粒子の中でお互いに超対称パートナーとなるモデルを作ることには困難があり，新しい粒子 (超対称性粒子) が導入される．表3.4に，通常の粒子と超対称性粒子の対応を示した．超対称性粒子の命名法がよくわかるように，英語名をそのまま記した．超対称性粒子は対応する通常の粒子と同じ質量をもつはずであるが，そのような粒子は見つかっていない．したがって，自然界に超対称性があったとしても，それは自発的対称性の破れにより現在完全な対称性はなく，超対称性粒子の質量は100GeV 以上もの大きさと考えられる．

超対称性理論が本格的に研究されたのは1980年代以降であるが，GUT にお

表 3.4　超対称性粒子

通常の粒子	スピン	超対称性粒子	スピン
quark: u, d, t, b, c, s	1/2	squark: $\tilde{u}$, $\tilde{d}$, $\tilde{t}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{s}$	0
lepton: e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ	1/2	slepton: $\tilde{e}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{\nu}_e$, $\tilde{\nu}_\mu$, $\tilde{\nu}_\tau$	0
photon: γ	1	photino: $\tilde{\gamma}$	1/2
W boson: $W^\pm$	1	wino: $\tilde{W}^\pm$	1/2
Z boson: Z^0	1	zino: $\tilde{Z}^0$	1/2
gluon: g	1	gluino: $\tilde{g}$	1/2
Higgs: ϕ^+, ϕ^0	0	higgsino: $\tilde{\phi}^+$, $\tilde{\phi}^0$	1/2
graviton: G	2	gravitino: $\tilde{G}$	3/2

ける階層性の問題が大きな動機であった．それは，GUT の枠組みで 14 桁も小さい電弱スケールのモデルをどうやって出すのかというものだが，超対称性を導入するとそれが可能になる．一方，最近の CERN における陽子-陽電子衝突装置の実験から，超対称性をもった SU(5) 理論 (SUSY-SU(5)) を支持する結果が得られている[16,17]．Z^0 粒子を生成させてクォーク・レプトンとの結合定数を測定し，標準理論の 3 つの結合定数が精度よく決定されたが，SUSY-SU(5) においてその結果を GUT スケールまで外装すると，3 つの結合定数がきれいに収束するのである．

また，SUSY-SU(5) では陽子崩壊の寿命が大幅に長くなり，カミオカンデの実験結果と矛盾しなくなる．そして，カミオカンデの約 20 倍の 5 万トンもの水を備えたスーパーカミオカンデ装置[18]では，その陽子崩壊が検出される可能性がある．

さらに，超対称性を局所化すると重力が自然に含まれ，重力の量子論を含んだ超重力理論を作ることができる．しかし，無限大の発散を処理する方法がなく，完成した理論にはなっていない．

超対称性理論・超重力理論に現れるスカラー場によって，インフレーションのメカニズムが説明される可能性があり，また，超対称性粒子はダークマターの候補にもなっている．

3.5　素粒子論と初期宇宙

これまで述べてきた素粒子論によって，初期宇宙の進化がどのように記述されるだろうか．確立した標準理論と，まだ推測の域を出ない大統一理論に分けると以下のようになる．

A．標準理論に基づく宇宙の進化

標準理論の予言する元素合成以前 ($t \gtrsim 10^{-2}$s，$T \gtrsim 10$MeV$\sim 10^{10}$K) の宇宙の進化は，次のようになる．2 つの相転移がキーワードである．

- **ワインバーグ-サラム相転移** ($t_{\rm WS} \sim 10^{-10}$s, $T_{\rm WS} \sim 10^2$GeV)

まず，$T \gg T_{\rm WS}$ では，すべての素粒子は質量ゼロで熱平衡状態にあった．温度が $T \cong T_{\rm WS}$ まで下がると WS 相転移が起こり，ヒッグス機構によって弱ボソン (W, Z) が質量をもち，電磁力と弱い力が分離する．また，湯川項によりクォークとレプトンも質量をもつようになる．その後，$T \sim 100$GeV で弱ボソンがクォーク対やレプトン対に崩壊するのに続き，クォークの t, b, c と τ 粒子がそれぞれの反粒子と対消滅を起こす．

- **クォーク・ハドロン相転移** ($t_{\rm QH} \sim 10^{-6}$s，$T_{\rm QH} \sim 1$GeV)

宇宙の温度が $T \cong T_{\rm QH}$ まで下がると，バラバラだった残りのクォーク u, d, s が結合してバリオンと中間子 (総称してハドロン) を形成する．これをクォーク・ハドロン相転移と呼ぶ．この時点で宇宙に存在する主な物質は，電子，μ 粒子，ニュートリノとそれぞれの反粒子，光子であり，陽子と中性子もわずかに残る．その後 μ 粒子の対消滅が起こり，元素合成の時代に移る．

B．大統一理論の予言

GUT のエネルギースケール ($T_{\rm GUT} \sim 10^{16}$GeV) は加速器実験で検証できる領域をはるかに越えており，実験的な検証は全く得られていない．にもかかわらず，宇宙論研究において真剣に議論されるのは，以下のような宇宙論的に重要な様々な予言をするからである．

- **バリオン数生成**

われわれの観測する宇宙には，陽子などのバリオンだけが存在し，反バリオンは存在しない．ところが，素粒子の標準理論は，物質・反物質に対して対称的になっている．宇宙におけるバリオン非対称性の起源は何か，そして，光子との数密度比が $\eta \equiv n_b/n_\gamma \sim 10^{-9}$ ときわめて小さいのはなぜか，というのが

大きな謎であった.

1967 年，サハロフ (Sakharov) は，バリオン対称な宇宙からバリオン数 (バリオンの数-反バリオンの数) が生成されるためには，次の 3 条件を満たさなければならないことを指摘した．それは，(i) バリオン数非保存の反応が存在すること，(ii) その反応で C および CP 対称性が破れていること，(iii) 熱平衡からのずれがあること，の 3 つである．GUT では，陽子崩壊などから (i) が満たされていることは明らかであろう．そして，1980 年前後の吉村らの研究により，あとの 2 つについても満たされることが明らかになった．数密度比 η が小さいことも，CP 対称性の破れが小さいことから説明がつくのである．

ただし，GUT を実現するモデルが明らかでないこともあって，バリオン数生成の具体的なモデルは明らかではない．最近の研究では，WS 相転移でバリオン数生成が起こるというシナリオも検討されている．いずれにしろ，サハロフの 3 条件を満たす過程においてバリオン数が生成されたことは，確からしいと考えられている.

なお，このようにバリオン数の対称性が破れることによって，物質が支配的な領域が現れるだけでなく，地平線を越えたスケールで見れば反物質の領域も等確率で存在するはずである (これをドメイン構造と呼ぶ)．古典的なビッグバン宇宙論に従えば，粒子の地平線の拡大によりドメインどうしの対消滅が進行し，現在の宇宙ではバリオン数ゼロになってしまう．このドメイン問題を解決するためにも，インフレーションが必要とされている.

- **位相欠陥の生成**

相転移が起こった後には，位相欠陥と呼ばれるエネルギーの塊が残される[19)]．位相欠陥とは何か，まずは最も単純なドメインウォールについて説明しよう．最も単純な 1 成分ヒッグス場の場合，相転移の後の真空は $\phi = +v$ と $\phi = -v$ と 2 つの状態のいずれかになる．そのどちらが選ばれるかは場の揺らぎからランダムに決まるため，宇宙は $\phi = +v$ と $\phi = -v$ の 2 種類の地平線スケールの領域に分けられる．ところが，その境界では ϕ の値が連続的に遷移するために必ず $\phi = 0$ となる領域が存在する．ポテンシャルエネルギーが面上に残されることになり，これをドメインウォールと呼ぶ.

ヒッグス場が複素 (または 2 成分) の場合，相転移後のポテンシャルはちょう

ど図 3.1 のような形になり，空間の大部分の真空は $\phi = \eta e^{i\theta}$ となる．ところが，あるループに沿って位相 θ が 0 から 2π まで一回りするような所では，その内側に，位相を周りとそろえられず $|\phi| \cong 0$ となる紐状の領域が残る．これがコスミックストリングである．同様に，ヒッグス場が 3 成分の場合は点状の構造が現れ，モノポールと呼ばれる．また，ヒッグス場が 4 成分の場合，$|\phi| \cong 0$ となる位相欠陥は存在しないが場の勾配エネルギー $(\nabla\phi)^2$ が残り，テクスチャーと呼ばれる．

これらの位相欠陥は構造形成の種になる可能性があり，最も有望なストリングを中心に，数値シミュレーションなどによって詳しく研究された[20)]．しかし，最近の CMB 揺らぎの観測結果は，位相欠陥による構造形成のシナリオに対して否定的である．

ところで，標準的な GUT のモデルではモノポールが必ず現れる．モノポールの質量は $m_{\rm GUT} \sim 10^{16}$GeV であるが，地平線サイズに 1 個の割合で生成しただけでも，質量密度は臨界密度より何桁も大きくなり，すぐに宇宙が潰れてしまう．これをモノポール問題という．ところが，このモノポール問題について追求した結果として，インフレーションという重要なアイデアが誕生したのである．

4章 インフレーション

4.1 GUT 相転移とインフレーション

WS 理論と同様に，大統一理論では $T \cong T_{\rm GUT} \sim 10^{16}$GeV でヒッグス場のポテンシャルの形が変化し，GUT 相転移が起こる．ところが，放射補正を考慮するとポテンシャル $V(\phi)$ の $\phi = 0$ と $|\phi| = v$ の間に山が残り (図 4.1)，滑らかには相転移が進まない．量子トンネリングや熱的揺らぎにより，不連続に $|\phi| = v$ の状態に移る．このような相転移を，エントロピーが不連続に変化することから 1 次相転移と呼ぶ．$T < T_{\rm GUT}$ になっても，大部分の領域ではヒッグス場の真空期待値は $\phi = 0$ のままであり，エネルギー密度は $\rho_v = V(0) =$ 一定となる．

このときの宇宙膨張はどうなるだろうか．放射と真空のエネルギーがある場合のフリードマン方程式は

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_v + \rho_r) - \frac{Kc^2}{a^2} \tag{4.1}$$

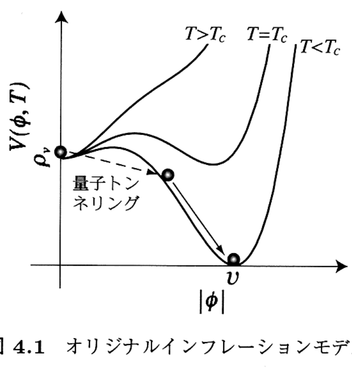


図 4.1 オリジナルインフレーションモデル

となる．ここで，右辺第 2 項，第 3 項がそれぞれ a^{-4}，a^{-2} に比例して減少するのに対し，第 1 項は一定なので，これが宇宙膨張を支配するようになる．そして，式 (4.1) の解は漸近的に

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad H^2 \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_v \tag{4.2}$$

となり，宇宙は指数関数的に膨張する．このような急激な膨張に基づく宇宙モデルをインフレーションモデルと呼び，1981 年に佐藤勝彦とグース (Guth) によって独立に提案された*．また，厳密に式 (4.2) の膨張則に従う宇宙をドジッター (de Sitter) 時空という．

インフレーションの時期が十分長く続くと，以下に説明するように宇宙論的諸問題が解決される．まず，モノポール問題が解決されることは容易にわかる．宇宙の指数関数的膨張により，生成されるモノポール間の平均距離が引き伸ばされて数密度がきわめて小さくなるからである．

地平線問題は次のようになる．インフレーションの始まる時刻を t_i，終わる時刻を t_e とすると，終了時における粒子の地平線は

$$d_H(t_e) \cong a(t_e)\int_{t_e}^{t_c} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \cong 2t_e \mathrm{e}^{H(t_e - t_i)} \tag{4.3}$$

となり，インフレーションがない場合の $a_e/a_i = \mathrm{e}^{H(t_e-t_i)}$ 倍になる．この値が 10^{27} 以上になると，CMB 光子を発する最終散乱面がその時刻の地平線内に入るのである．これによって，宇宙の一様・等方性が説明されるとともに，物質・反物質のドメイン問題も解決する．

また，宇宙が加速的に膨張して $\dot{a}$ が増加すると，式 (2.21) から Ω が 1 に近づくことも明らかで，平坦な宇宙が実現される．仮に，$\Omega_i - 1$ が 1 のオーダーだったとすると，現在再び $\Omega_{\mathrm{tot}} - 1$ が 1 のオーダーになる条件はやはり $a_e > 10^{27} a_i$ である．

さらに，銀河などの構造ができるための密度揺らぎの種を作るという重要な帰結があるが，この説明は次節にまわす．

---

* 佐藤とグースは同時にインフレーションのアイデアを提案したにもかかわらず，欧米の研究者はグースの名前だけを引用する傾向にある．インフレーションと名づけたのがグースだからであろうか．それはともかく，両者の視点は少し違っていた．グースは宇宙の一様・等方性，平坦性が実現することを示したのに対し，佐藤は物質・反物質のドメイン問題の解決や構造形成の起源が説明される可能性を指摘した．

このオリジナルのインフレーションモデルには，残念ながら，重大な問題があることが提案者達自身によって指摘された．インフレーションが終了してビッグバン宇宙に移行するためには，量子トンネリングや熱的揺らぎでできた $|\phi| = v$ の真空の泡が膨張・衝突し，最終的に宇宙全体が $|\phi| = v$ の状態にならなければならない．ところが，$\phi = 0$ として残された領域が指数関数的に増大していくために，いつまでたっても相転移が終わらないのである．

4.2　スローロール型インフレーションと密度揺らぎの生成

オリジナルモデルが出た翌年，リンデ (Linde) とアルブレヒト (Albrecht)・シュタインハート (Steinhardt) は独立に，ニューインフレーションモデルと呼ばれる新しいモデルを提案した．それは，ポテンシャルの $\phi = 0$ と $|\phi| = v$ の間に山がなくても，非常に滑らかであればインフレーションは起こるというものであり，具体的には，$T = 0$ で

$$V(\phi) = A\left[\phi^4 \ln\left(\frac{\phi}{v}\right)^2 + \frac{v^4 - \phi^4}{2}\right] \tag{4.4}$$

と表されるコールマン-ワインバーグ (Coleman-Weinberg) 型ポテンシャルを仮定する．このモデルでは，$T < T_{\rm GUT}$ になるとすぐに相転移が始まり，ヒッグス場は $\phi = 0$ から $|\phi| = v$ に向かって動き始める．このときのヒッグス場の振る舞いと宇宙膨張は，クライン-ゴルドン方程式とフリードマン方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad V' \equiv \frac{{\rm d}V}{{\rm d}\phi} \tag{4.5}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_v, \quad \rho_v = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{4.6}$$

から決定される．ポテンシャルが十分に平坦であると，場の変化は宇宙膨張の時間スケールに比べて十分遅くなり，$|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|$, $\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)$ が満たされ (これをスローロール条件という)，指数関数的膨張が実現する．そして，$\phi \cong v$ に達すると激しく振動し，そのエネルギーが通常の物質に転化してビッグバン宇宙が誕生するのである (図 4.2).

このスローロール型のインフレーションモデルが提案されてから，インフレーションの論文は爆発的に増加したが，それは大規模構造の種となる密度揺らぎ

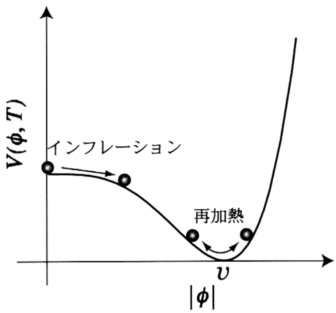


図 4.2　ニューインフレーションモデル

を作ることができ，しかもそのスペクトルを予言することができるからである．以下で，そのことを少し詳しく見てみよう[6)]．

方程式 (4.5)，(4.6) が記述するのは，ヒッグス場の真空期待値 $\bar{\phi}(t) \equiv \langle\phi\rangle$ であって，量子揺らぎも併せると

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.7}$$

と表される．この定義より $\langle\delta\phi\rangle = 0$ であるが，$\langle\delta\phi^2\rangle$ はゼロではなく，これが密度揺らぎの起源となる．$\delta\phi$ を共動座標で見た波数成分 k (波長 $L = 2\pi/k$) にフーリエ展開し，背景宇宙をドジッター時空で近似すると，ポテンシャル項を無視したクライン-ゴルドン方程式 $\Box(\delta\phi) = 0$ は

$$\delta\ddot{\phi}_k(t) + 3H\delta\dot{\phi}_k(t) + \frac{k^2}{a^2(t)}\delta\phi_k(t) = 0 \tag{4.8}$$

となる．この方程式は解けて，2 乗平均は次のように求められる．

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k|\delta\phi_k|^2, \quad |\delta\phi_k|^2 = \frac{1}{2ka^2} + \frac{H^2}{2k^3} \tag{4.9}$$

$a = 1$，$H = 0$ とおくと第 1 項だけ残り，$|\delta\phi_k|^2 = 1/2k$ となるが，これは場の理論の教科書［例えば文献 4)］に載っているミンコフスキー時空の結果にほかならない．一方インフレーション宇宙では，揺らぎのスケール a/k が地平線* を

* ここでは，ハッブル地平線のことを単に地平線と呼ぶ．ハッブル地平線とは c/H のことで，各時刻における宇宙膨張の時間スケールの間に因果関係をもちうる距離を表す．エネルギースケールで特徴づけられる物理の素過程を考える際には，粒子の地平線よりハッブル地平線の方が意味をもつ．

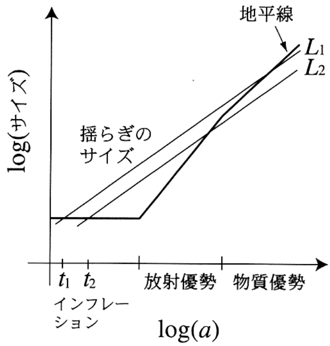


図 4.3　密度揺らぎのサイズとハッブル地平線の関係

越えると第 2 項が支配的になり，一定値 $|\delta\phi_k|^2 = H^2/2k^3$ に近づく．通常は，地平線サイズを超えた量子的揺らぎが古典的な揺らぎになると解釈され，第 2 項だけを考える．式 (4.9) の積分を実行すると*

$$\langle\delta\phi^2\rangle = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 H(t - t_i) \tag{4.10}$$

となる．これは，時間 H^{-1} ごとに，振幅 $|\delta\phi| = H/2\pi$ の揺らぎが生成することを示している．

古典化される揺らぎのサイズは $L \sim H^{-1}$ と一定であるが，直ちに宇宙膨張によって引き伸ばされるため，結果的に様々なスケールの揺らぎが残る．このことが，インフレーションがスケールによらない揺らぎを作る理由である．揺らぎのサイズと地平線の時間的な関係を図 4.3 に示した．インフレーション期に地平線を出た揺らぎは，後になって地平線の内側に戻ってくる．早く地平線を出たものほど戻ってくる時期が遅く，大規模の構造を作るのである．

現在の密度揺らぎの振幅は，ヒッグス場のポテンシャルから評価することができる．スローロールの間，エネルギー密度は $\rho \cong V(\phi)$ と近似されるから，その揺らぎは $\delta\rho \cong \delta\phi V'(\phi)$ となる．そして，揺らぎの発展方程式を解くことにより，現在の密度揺らぎ $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ が求められるのである．線形摂動理論から

*式 (4.9) の積分区間については説明が必要であろう．まず，地平線を越える揺らぎのみを考えているので，ある時刻 t における k の上限は $k = a(t)H$ になる．また，最も波長の大きい揺らぎはインフレーション開始時に地平線を出たものだから，$k = a(t_i)H$ になる．

導かれる重要な点は，$\zeta \equiv \delta\rho/(\rho+P)$ という量が地平線を越えるスケールで一定となることである．物質優勢期，放射優勢期では $\zeta \sim \delta$ であるのに対し，インフレーション期では $P+\rho=\dot{\phi}^2 \ll \rho$ であるために $\zeta \gg \delta$ となる．つまり，インフレーションから放射優勢に移行するときに，大幅に密度揺らぎが増幅されるのである．このことに起因して，後で見るように CMB の観測からモデルへの制限が厳しいものとなる．

重力ポテンシャル，つまり温度揺らぎに直接反映する量は

$$\langle \delta(\boldsymbol{x})^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{k^2 \langle |\delta_k| \rangle}{2\pi^2} \mathrm{d}k \equiv \int_0^\infty \Delta(k)^2 \frac{\mathrm{d}k}{k} \tag{4.11}$$

で定義される偏差 $\Delta(k)$ である．これは，半径 $L=2\pi/k$ の球内の平均の揺らぎ，または質量の揺らぎに対応するからである．k-成分の揺らぎが地平線に入るときの大きさ $\Delta_H(k)$ は，次のように求められている．

$$\Delta_H(k) = \frac{48}{5}\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{m_{\mathrm{Pl}}^2 V'}(t_k) = \frac{2\sqrt{6\lambda}}{5\pi} N_k \tag{4.12}$$

ここで t_k は，k-成分の揺らぎがインフレーション期に地平線を出たときの時刻であり，最後の表式は，コールマン-ワインバーグポテンシャル (4.4) を $V(\phi) \cong Av^4/2 - \lambda\phi^4/4,\ \lambda \cong 80A$ と近似したときの結果である．$N_k \equiv a(t_e)/a(t_k)$ は，揺らぎがインフレーション中にどれだけ引き伸ばされたかを表し，現在のスケール L との関係は $N_{L=2\pi/k} = 50+\ln(L/\mathrm{Mpc})$ となる．L による変化が小さいことから，揺らぎの振幅がほぼスケール不変になっていることがわかる．

式 (4.12) は，残念ながらニューインフレーションモデルがうまくいかないことを表している．CMB の揺らぎから $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ であるとすると，結合定数が $\lambda \sim 10^{-13}$ という値をとらなければならない．このようなきわめて小さな値であること自体が不自然であるが，素粒子理論としてほかの粒子との相互作用を考えると $\lambda \sim 0.1$ 程度でなければならないので，明らかに矛盾する．

さらに，初期値問題と呼ばれる困難もある．高温により対称性が回復していたというシナリオには，初めに宇宙が熱平衡状態であったということが前提になっているが，宇宙誕生から GUT スケール ($t_{\mathrm{GUT}} \sim 10^{-36}$s) までの間に，十分な粒子反応が起こって熱平衡に達したとは考えにくい．したがって，対称性

が回復したという前提は成り立たず，初期に $\phi_i \cong 0$ を実現させることができないのである．

4.3　様々なインフレーションモデル

オリジナルモデルおよびニューインフレーションモデルは結局失敗に終わったが，インフレーションのアイデアは多くの研究者に受け入れられるものとなった．地平線・平坦性問題を解決し，密度揺らぎの起源を説明する唯一の理論だからである．その後の研究は，インフレーションが自然に実現され，観測と矛盾しないモデルの探求に進んだ．まだ決定的なモデルは存在しないが，重要なアイデアを含むいくつかのモデルを紹介する．

A．初期条件に依存しないモデル I——カオス的インフレーション

ニューインフレーションのアイデアは素晴らしかったが，初期値問題は致命的である．そこでリンデは 1983 年，インフレーションの機構を GUT 相転移から切り放し，広い初期条件においてインフレーションが実現するモデルを提案した．それは

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{4.13}$$

のような単純なポテンシャル (図 4.4) を もつスカラー場さえあればインフレーションが起こるというものである．誕生直後の宇宙はスカラー場の揺らぎが大きく，場所によって様々な値をとっていたと考えられるが，このモデルでは，

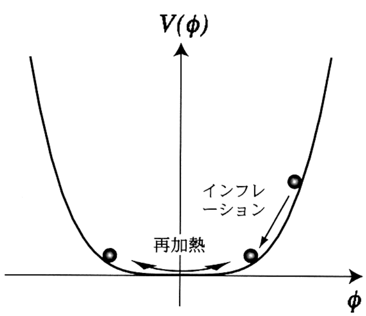


図 4.4　カオス的インフレーションモデル

$\phi_i > m_{\rm Pl}/3$ でありさえすればインフレーションが起こるのが特長である．誕生直後の混沌とした宇宙においてインフレーションが起こることから，カオス的インフレーションと名づけられた．ニューインフレーションと同様に，$\phi \cong 0$ で振動が起こり，場のエネルギーが物質に転化してビッグバン宇宙になる．

ところが，ポテンシャル (4.13) を (4.12) に当てはめてみると，$\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ であるためには，やはり結合定数を $\lambda < 10^{-13}$ と小さくしなければならないのである．さらに，GUT 相転移から切り放してしまったことで，そのスカラー場の物理的根拠はなくなってしまった．スカラー場が，素粒子理論に基づくものでなければ，言い換えると別の物理現象からも要請されるものでなければ，結局説得力のあるモデルとはならない．しかし，このカオス的インフレーションモデルは，インフレーションが単純なモデル・広い初期条件で起こる一般的な現象であることを示したという点で，その後の研究に大きな影響を与えた．

B．オリジナルモデルの復活？——拡張インフレーション

その後も様々なインフレーションモデルが提案されたが，基本的にはすべてスローロール型であり，GUT の 1 次相転移に基づくシナリオは全く見向きもされなくなった．ところが，1989 年，ラ (La) とシュタインハートによる拡張インフレーションモデル[21)]により，オリジナルモデルのシナリオが再び注目されたのである．

素粒子理論と重力理論を統一しようとするとき，アインシュタインの相対性理論は何らかの拡張が必要であるが，最も単純に拡張したのがブランス-ディッキー (Brans-Dicke：BD) 理論である[22)]．この理論は，物質分布によって重力定数も変わることが大きな特徴である．BD 理論における宇宙の膨張則は，物質優勢期および放射優勢期ではアインシュタイン理論の場合とそれほど違いはないが，$p = -\rho$ のインフレーション期では大きく異なり

$$a(t) \propto t^p, \quad H = \frac{p}{t}, \quad p \gg 1 \tag{4.14}$$

となる．膨張が指数関数的のときとは対照的に，宇宙膨張 (ハッブルパラメータ) が時間的に減少するため，1 次相転移で形成される泡がうまく衝突して相転移が完了するのである．

このようにしてオリジナルモデルの問題点は解決されたが，新たな困難が指

摘された[23]．泡の衝突によって相転移が終了した後の密度揺らぎを評価してみると，CMB の揺らぎと矛盾するのである．著者と前田もかつてこの研究に加わり，泡の進化の解析から揺らぎが大きくなりすぎることを証明した[24]．

その後，BD 理論をさらに一般化したスカラー・テンソル理論を使って，観測と矛盾しないようなモデルがいくつか提案された[25]．したがって，GUT の 1 次相転移に基づくモデルの可能性はまだ残されている．しかし，現段階でモデルの詳細をこれ以上議論することはあまり意味がないだろう．重力理論の拡張は，重力を含む統一理論や重力波観測など，様々な面から議論すべき問題だからである．

C．初期条件に依存しないモデル II——位相欠陥インフレーション

1994 年に，リンデとビレンキン (Vilenkin) は独立に位相欠陥インフレーションモデルを提案した[26]．§3.4 で述べたように位相欠陥は相転移の後に残る場のエネルギーの塊であり，通常はミクロなものとされているが，それが指数関数的に膨張して観測されている宇宙より大きくなるというのが，位相欠陥インフレーションである．ポテンシャルは，ヒッグスモデルに現れる単純な式 (3.12) を仮定する．真空期待値がプランク質量程度，つまり $v \sim m_{\rm Pl}$ になると，位相欠陥の中でスローロール型インフレーションが起こるのである．

このモデルでは，ニューインフレーションの初期値問題が，カオス的インフレーションとは違う形で解決されている．その要点は以下のとおりである．

- たとえ初期の揺らぎが大きくても，相転移が終わった後，$\phi_i \cong 0$ の領域は位相欠陥として必ず現れている．このことは，ニューインフレーションの議論において見落とされていたのだと思う．
- $v \sim m_{\rm Pl}$ では，位相欠陥の典型的なサイズが地平線サイズになる．つまり，地平線サイズで $\phi_i \cong 0$ (ドジッター的) という初期条件が自然に実現する．

さらに，著者らの解析から次のことが明らかになった[27,28]．

- ゲージ結合がない場合のインフレーションの起こる条件は $v > 0.33 m_{\rm Pl}$ であり，初期条件にはよらない．また，ゲージ結合がある場合の条件もこれにほぼ一致するが，ゲージ結合および初期条件に若干依存する．

宇宙論的シナリオは，ニューインフレーションやカオス的インフレーション

と同様である．位相欠陥自身は永遠にインフレーションを続けるが，その中のある領域に注目すれば，スローロール型インフレーションが十分に続いた後，$\phi \sim v$ で場が振動して再加熱が起こり，ビッグバン宇宙に移行する．この時空を巨視的に見ると，膨張し続ける位相欠陥から，無数のビッグバン宇宙が外に押し出されるようにして誕生しているのである．

1998年になると，このモデルがさらに関心を集めるようになった．超重力理論や超弦理論から導出されるいくつかのポテンシャルでは，位相欠陥のインフレーションが自然に実現されるのである[29]．これは，位相欠陥インフレーションが一般的な現象ということを示唆しており，様々な素粒子理論について調べる必要があろう．

ところで，著者はインフレーションを起こす磁気モノポールの時空構造についても調べ，大変興味深い結果を発見した[28]．かつて，オリジナルのインフレーションモデルを調べていた佐藤らは，$\phi = 0$ にとどまった領域が $|\phi| = v$ の領域に囲まれると元の宇宙とは因果的に切り放された「子宇宙」になる，という驚くべき結果を発見した[30]．ただし，それは特別の初期条件によって実現する現象であった．一方，磁気モノポールのモデルでは，自然な初期条件のもとで必ず「子宇宙」ができることが明らかになったのである．その時空構造は図 4.5 のようになる．

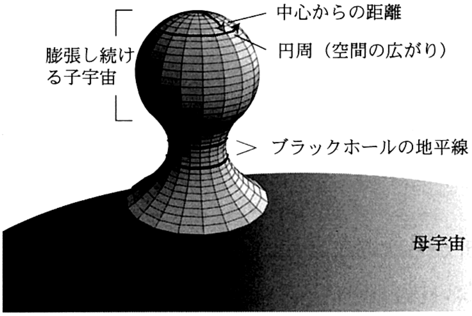


図 4.5　位相欠陥(モノポール)インフレーションモデルにおける子宇宙の生成．磁気モノポールが膨張すると周りにブラックホールの地平線が現れ，元の宇宙(母宇宙)から因果的に切断された宇宙(子宇宙)になる．母宇宙の観測者にとっては，普通のブラックホールと区別がつかない

D. 開いた宇宙を作るモデル——オープンインフレーション

これまで紹介したすべてのインフレーションモデルは，$\Omega_{\rm tot}=1$ の平坦な宇宙を予言する．一方，様々な観測結果は，$\Omega_m \lesssim 0.3$ の低密度の宇宙が示唆するようになってきた．インフレーションと矛盾しないためには，宇宙項があって $\Omega_m+\Omega_\Lambda=1$ であればよいのだが，$\Omega_\Lambda \sim \Omega_m$ となる宇宙項の起源を説明する理論は今のところ存在しない．そこで，1994年頃から，開いた宇宙を実現するオープンインフレーションモデルが注目を集めるようになった．

まず，通常のモデルではなぜ平坦な宇宙になるのかをいわなければならない．§4.1で述べたように，現在観測されている領域が一様になるためには，インフレーションの間に宇宙が約 10^{27} 倍以上に膨れ上がらなければならない．ところが，それだけ膨張を経ると曲率項はほとんどゼロになる．つまり，時空は一様化されると自動的に平坦になってしまうのである．

では，オープンインフレーションモデルとはどのようなものだろうか．そのアイデアは，1980年のコールマンとデルチア (De Luccia) による1次相転移の研究に遡る[31)]．1次相転移はでは，トンネル効果によって場がポテンシャルの山を越えるが，その解の最低次はユークリッド化した時空の古典解として与えられ，O(4) 対称な泡が最も高い確率で生成される．そして，O(4) 対称なユークリッド的な解から実空間への解析接続で得られる解を見ると，泡の内部に一様・等方な開いた時空が現れているのである*． 泡の中の宇宙は一様・等方かつ $\Omega \cong 0$ として誕生するので，その後第2のインフレーションを適当な期間起

---

* このことは，以下のように示すことができる[32)]．まず，O(4) 対称とは4次元ユークリッド空間における3次元的球対称のことであるから，その計量は

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= d\tau_E^2 + a_E^2(\tau_E)[dr_E^2 + r_E^2 \sin^2 r_E(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \\ &= a_E^2(\eta_E)[d\eta_E^2 + dr_E^2 + r_E^2\sin^2 r_E(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる．実空間における座標の選び方はいろいろあるが

$$\eta = -\eta_E - \frac{\pi}{2}i, \quad r = ir_E, \quad a = -ia_E \tag{2}$$

と接続されるように選ぶと

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(\eta)[-d\eta^2 + dr^2 + r^2\sinh^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \\ &= -dt^2 + a^2(t)[dr^2 + r^2\sinh^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \end{aligned} \tag{3}$$

となる．つまり，一様・等方な開いた宇宙になるのである．これは，有限の体積の泡の中に無限の体積の一様宇宙が現れているという一見驚くべき結果である．時間座標の選び方によって3次元空間の見え方が様々に変わるという，相対論特有の性質である．

こすことにより Ω の値が調節され，密度揺らぎもその間に作られるというシナリオである．

このシナリオをインフレーションモデルとして最初に議論したのはゴット (Gott) で，1982 年のことであった[33)]．しかし，多くの関心を集めるようになったのは，観測が小さい Ω_m を示唆するようになり，佐々木らやブッチャー (Bucher) らが密度揺らぎの解析を始めたことによる[34)]．これまでに，様々なモデルについて密度揺らぎのスペクトルが計算されており，CMB の観測と矛盾しないようなモデルも可能であることが示されている[35)]．

宇宙が開いていてもインフレーションは正しいという主張には異論もある．もともとインフレーションの魅力のひとつは，$\Omega_{\rm tot}=1$ という明快な予言をすることであった．宇宙の曲率が何でもありというのでは理論としての予言能力を欠き，もし宇宙が平坦でないことが明らかになったらインフレーションは破棄されるべきだという考え方もあり[36)]，研究者の間でも意見が分かれている．

なお，§5.4 で述べるように，最新の観測は宇宙項が存在して $\Omega_{\rm tot}\sim 1$ であることを示唆している．現段階では判断できないが，観測から $\Omega_{\rm tot}=1$ ということになれば，必然的にこのモデルは破棄されることになる．

4.4　インフレーションモデルの検証に向けて

COBE による CMB 揺らぎの観測結果は，インフレーション宇宙論を強く支持するものであった．密度揺らぎの 2 乗平均 (パワースペクトル) について

$$P(k)\equiv\langle|\delta_k|^2\rangle\propto k^n \tag{4.15}$$

というべき則を仮定すると，$n=1$ のハリソン-ゼルドヴィッチ (Harrison-Zeldovich) 型が再現されることがわかったのである*．式 (4.12) で定義された揺らぎが地平線に入るときの偏差は，$\langle\Delta_H^2(k)\rangle\propto k^{n-1}$ と表されるため，$n=1$ というのはまさに，インフレーションの予言するスケール不変な揺らぎになっているのである．

ただし，正確に $n=1$ と決まったわけではなく，COBE の観測からは $n=$

* ハリソン-ゼルドヴィッチ型のスペクトルは，もともとインフレーションとは関係なく 1970 年代に提案された．$P(k)\propto k^n$ の単純な仮定では，$n=1$ 以外は発散が現れて現実的なモデルが作れないのである．

1.2 ± 0.3 となっている[12)]．しかし，このずれがモデルに制限を与えるための好材料となる．式 (4.12) からわかるように，インフレーションモデルの予言する密度揺らぎも厳密なスケール不変ではなく，ポテンシャルの形に依存して様々な値をとる．したがって，今後の観測から精度よく n が決まれば，多くのモデルを排除することができるだろう．当面の理論的研究としては，素粒子論的に動機づけられた様々なモデルについて，密度揺らぎ (および重力波) の振幅とべき指数を計算して観測と比較することである．

しかしながら，インフレーションモデルに対応する素粒子モデルが得られない限り，モデルを実証したことにはならないだろう．最終的には，大統一理論，超対称性理論，超弦理論など，未知の理論の解明が必要である．素粒子の標準理論の検証には加速器実験が大きな役割を果たしたが，いまや加速器実験には技術的・財政的な限界がある．理論からも実験からも，様々なアプローチが必要であろう．そのひとつの可能性として，宇宙のダークマターが未知の素粒子理論のヒントを与えてくれるかもしれないのである．

5章 ダークマター

5.1　天体系のダークマター問題

ダークマター (暗黒物質) とは，その名の示すように暗くて見えない (電磁波によって検出できない) 物質のことである．ダークマターの存在は，1933 年にツヴィッキー (Zwicky) によって最初に指摘された．かみのけ座銀河団および乙女座銀河団の質量を推定し，それが光っている銀河質量の 100 倍以上もあることを示したのである．

光学的に観測されるものは星であり，その明るさの測定と星の理論からその質量を見積もることができる．一方，見えない物質を含めた全質量は以下のように推定される．簡単のため，球対称な密度分布の中で円運動している天体を考えよう．中心からの距離を r，速度を v，距離 r の内側に含まれる物質の質量を $M(r)$ とすると，ニュートン力学における重力と遠心力の釣り合いから

$$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{v^2}{r} \tag{5.1}$$

が得られる．銀河の質量については，回転速度を測定すれば，式 (5.1) から質量を推定することができる．一方，銀河団は銀河の集まりであり*，全体として回転運動しているわけではない．しかし，重力平衡の仮定の下にビリアル定理を適用すると，速度分散 $< v^2 >$ について式 (5.1) と同様の関係が成り立つのである．

1970 年代に入ると，電波観測の進歩によってダークマターの存在が確かなものとなった．銀河中の中性水素ガスから放射される電波の観測により，そのドッ

* 数十個以上の銀河が 10 ～ 30Mpc の領域に集まったものを銀河団と呼び，数個～数十個以下の銀河の集まりを銀河群と呼ぶ．また，銀河団がいくつか集まったものを超銀河団という．特に，われわれのいる銀河群を局所銀河群，超銀河団を局所超銀河団と呼ぶ．

プラー効果によって銀河の回転速度は精度よく決まるようになった．水素ガスは暗い外層部にまで広がっているため，遠方の回転速度まで測定することができるのである．物質が光り輝く部分に局在しているとすれば，外側の暗い部分では $M(r)$ はほぼ一定になり，式 (5.1) から $v \propto 1/\sqrt{r}$ となるはずである．しかし，様々な渦状銀河について，$v(r)$ がほぼ一定のまま減少しないという観測結果が得られた．このことは，ダークマターが銀河の外周部に多く分布し，輝いている部分を超えて広がっていることを示す証拠である．このように銀河を取り囲んでダークマターが分布している領域 (ハロー) は，観測される銀河質量の 10 倍程度もあると推定された．

通常，各物質成分の質量密度 ρ_j は，臨界密度との比 $\Omega_j \equiv \rho_j/\rho_{\rm cr}$ として表される．電磁相互作用を介して検出される物質 ($\Omega_{\rm obs}$) として，最近では上述の星 ($\Omega_{\rm star}$) と中性水素ガス ($\Omega_{\rm HI+H_2}$) に加え，X 線観測およびライマン α 吸収線*観測により銀河間の水素プラズマ ($\Omega_{\rm HII}$) も含まれるようになった．それらの量は，福来らの評価によると次の通りである[37]．

$$\Omega_{\rm star} \cong 0.0035 h_{70}^{-1}, \quad \Omega_{\rm HI+H_2} \cong 0.00063 h_{70}^{-1}, \quad \Omega_{\rm HII} \cong 0.017 h_{70}^{-1}$$

$$\Omega_{\rm obs} = \Omega_{\rm star} + \Omega_{\rm HI+H_2} + \Omega_{\rm HII} \cong 0.021 h_{70}^{-1} \qquad (5.2)$$

一方，力学平衡にある銀河・銀河団・超銀河団の力学質量は，先に述べた方法で評価することができる．古くから，様々な階層で力学質量と光度の比 (M/L) が求められ，ダークマターの存在量が論じられてきたが，M/L は大スケールになるほど大きくなるものの銀河団スケール以上でほぼ一定になる．したがって，銀河団質量から得られる物質密度 $\Omega_{\rm cl}$ は，ほぼ宇宙の物質密度 Ω_m に等しいと考えられる．カールバーグ (Carlberg) らによると，その値は

$$\Omega_{\rm cl} \cong 0.2 \qquad (5.3)$$

と評価されており[38]，$\Omega_{\rm obs}$ の約 10 倍もあることから，宇宙全体に存在する物質の大部分はやはりダークマターであると結論づけられる．その正体はいったい何か，というのがダークマター問題である．

* クェーサー吸収線系のひとつ．この起源となる銀河間雲をライマン α 雲と呼ぶ．

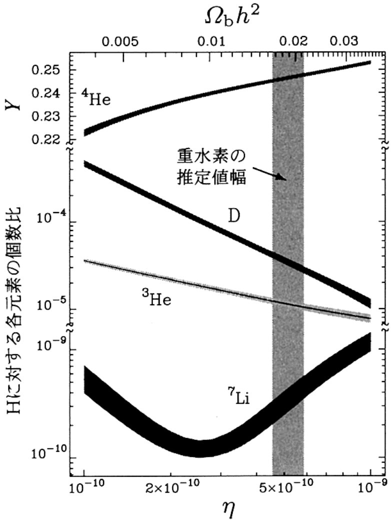


図 5.1　ビッグバン元素合成理論における軽元素の生成量と，クェーサー吸収線観測による重水素量の推定値．ハッブルパラメータを $H_0 \equiv 100h\mathrm{km/s/Mpc}$ とおいた[文献 13) より引用]

5.2　元素合成とバリオンダークマター

ダークマターは通常の物質 (バリオン) なのか，それとも未知の物質なのか．この疑問については，軽元素の存在量から示唆が得られる．§2.6 で述べたように，ビッグバン元素合成理論における軽元素の生成量は，バリオンの数密度 $\eta \equiv n_b/n_\gamma$ (または密度パラメータのバリオン成分 $\Omega_\mathrm{b} \equiv \rho_\mathrm{b}/\rho_\mathrm{cr}$) に依存する (図 5.1)．特に，重水素 D の量は Ω_b に強く依存するため，バリオメーターなどと呼ばれている．ところが，重水素はいったん作られても星形成の過程で壊されるため，測定することは難しかった．

その困難を克服するため，ハワイのマウナケア天文台にある直径 10m のケック望遠鏡では，1994 年よりクェーサーから放出される光のスペクトルの観測が行われた．クェーサーの光は水素や重水素による固有な振動数の吸収を受けるので，スペクトルの吸収線から重水素の存在量を推定されるが，星形成前の水素雲による吸収線が得られれば，ビッグバン元素合成による重水素量を直接観測したことになる．そして，バーレス (Burles)・タイトラー (Tytler) によっ

て $z > 2$ の 2 つのクェーサーの吸収線中に重水素が発見され，その存在量からバリオン密度が求められた[13,39]．

$$\Omega_{\rm b} \cong 0.038 h_{70}^{-2} \tag{5.4}$$

初期宇宙の重水素が観測されたことは画期的ではあるものの，それに基づく重水素量または式 (5.4) には検討の余地がある．重水素量の推定値は一般に，吸収体である水素雲の乱流場モデルに依存しているからである．高原らは，乱流速度場の空間相関を考察してモデルを修正し，$\Omega_{\rm b} \cong 0.030 h_{70}^{-2}$ というやや小さい値を得ている[40]．

重水素の観測結果とは独立に，オリーヴ (Olive) は，ヘリウムとリチウムの存在量から $0.012 h_{70}^{-2} < \Omega_{\rm b} < 0.032 h_{70}^{-2}$ という制限を得ている．これらの結果を総合すると，$\Omega_{\rm b}$ の値を精度良く決定することはまだできないものの，式 (5.4) は少なくとも上限を与えており，$\Omega_{\rm b} < 0.2\Omega_{\rm cl}$，つまり物質の大部分が非バリオンであると結論づけてよいと思われる．一方，観測されている物質の量 (5.2) との比較では，バリオンの正体はほとんどすべて確認されている ($\Omega_{\rm b} \cong \Omega_{\rm obs}$) のか，未知のダークマターの存在も無視できないか，現段階では結論を出すことができない．

5.3　構造形成と非バリオンダークマター

前節の結論から，非バリオン粒子がダークマターとして大量に存在しなければならないことになるが，その粒子とはいったい何だろうか．ダークマターとして寄与するためには，安定で，十分な質量密度をもち，かつ相互作用がきわめて弱い粒子でなければならないが，それを満たすものは素粒子の標準理論にはない．現在候補として考えられているのは，有質量のニュートリノ，アクシオン，超対称性粒子の 3 種類であり，いずれも §3.4 で述べた標準理論を超えた理論に現れる．

素粒子ダークマターの研究は 1980 年代から盛んになったが，その主な動機は宇宙の構造形成理論にある．§2.7 で述べたように，物質としてバリオンのみを仮定したときの困難は，CMB の揺らぎから，宇宙の晴れ上がりのとき ($z_{\rm dec} \cong 1000$) の密度揺らぎが $\delta_{\rm dec} \sim 10^{-5}$ でなければならないことであった．ところが，放射

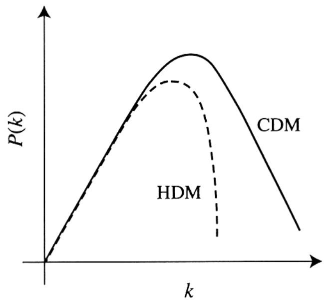


図 5.2　密度揺らぎのパワースペクトルの模式図

と相互作用をしない非バリオンダークマターはその制約を受けない．$z = z_{\rm dec}$ に十分な大きさの非バリオン揺らぎがあったとすると，その影響により，バリオンの揺らぎも晴れ上がり後に急速に成長することができるのである．

まず，有質量のニュートリノはどうだろうか．ニュートリノの数密度は，かつて熱平衡状態であったことから計算でき，各世代ごとに $n_{\nu_i} = 110\,{\rm cm}^{-3}$ と求められている．すると，質量が $m_{\nu_i} \cong 100\,{\rm eV}$ のとき臨界密度 $\rho_{\rm c} \cong n_{\nu_i} m_{\nu_i}$ になるので，ダークマターを説明するためには $m_{\nu_i} \sim 10\,{\rm eV}$ でなければならない．このような粒子は，宇宙の温度が $10\,{\rm eV} \sim 10^5{\rm K}$ に下がるまで相対論的であり，物質優勢になった後 ($T < T_{\rm eq} \sim 10^4{\rm K}$) も大きな速度をもって運動するので，熱いダークマター (HDM) と呼ばれる．HDM が 10 eV 程度の質量をもつ場合，その自由な運動により，現在のスケールで約 50 Mpc 以下の揺らぎは消されてしまう．そのため，銀河形成を説明することは難しく，構造形成理論においては不利な立場にある．

一方，$T \sim T_{\rm eq}$ の頃に非相対論的なダークマターを CDM と呼び，アクシオンおよび超対称性粒子はこれに属する．CDM の場合，HDM に比べて短波長側の揺らぎが残り，宇宙の構造形成をうまく説明できる可能性がある．CDM と HDM のパワースペクトルの特徴を模式的に表したものが図 5.2 である．

1980 年代から，大規模な N 体シミュレーションによって，自然な初期条件から現在観測されているような銀河分布が再現されるか詳しく調べられた．さらに，COBE による CMB 揺らぎの観測から，揺らぎの大きさに直接制限を与える

ことができるようになった．その結果，$\Omega_m = 1$，$\Omega_\Lambda = 0$，$H_0 = 50\mathrm{km/s/Mpc}$，$n = 1$ の標準 CDM モデルは観測と矛盾することが結論づけられた．標準 CDM モデルから予想されるパワースペクトル $P(k)$ を観測データと比較すると，ピークの位置が短波長側になり，振幅も銀河・銀河団スケールで大きくなるのである．そこで，Ω_m，Ω_Λ，H_0，n の値を変えたモデルや，HDM も混ぜた混合ダークマターモデルが検討されている．その中で，宇宙項を入れた CDM モデル（$\Omega_m \sim 0.3$，$\Omega_\Lambda \sim 0.7$）が大規模構造および CMB の観測結果に最も合うという結論が，複数の研究者によって導かれている[42,43]．

実際の宇宙の非一様性，つまり揺らぎのパワースペクトルは，銀河の赤方偏移サーベイ*から決定される．現在，銀河の 3 次元分布地図を作ることを目的に，日米共同のスローン・デジタルスカイサーベイ計画が進行中であり，全天の約 4 分の 1 の天域について約 100 万個の銀河の赤方偏移を測定しようとしている[44]．また，豪英共同の 2 dF (2 degree Field) 計画では，全天を多数の 2 度区画に分けて測定し，約 25 万個の銀河の赤方偏移を得ようとしている[45]．高精度の CMB 探査計画 (次節 **B** 項参照) と併せ，ダークマターについて有力な情報が得られることが期待される．

5.4　宇宙モデルとダークマター

ダークマターが宇宙全体に分布する物質の主成分であるとすれば，その影響は宇宙の膨張則や幾何学的構造にまで及ぶ．つまり，ダークマターの存在量は，宇宙モデルと密接にかかわっている．そこで本節では，宇宙モデル (Ω_m と Ω_Λ) の決定に関係する観測の現状を紹介する．

A．遠方の天体による宇宙の幾何学テスト

観測者から見て一定の立体角に含まれる円錐状の領域を，宇宙空間から切り取ったとしよう．平坦な宇宙を基準にすると，開いた宇宙では遠方にいくほどどんどん広がっていくのに対し，閉じた宇宙では先細りになる．また，宇宙の時間変化も考慮すると，膨張則によって過去の領域が相対的に広くなったり狭く

---

* ある一定の領域をくまなく覆い尽くすように行う観測をサーベイという．銀河の赤方偏移の測定とハッブルの法則により，銀河の地図を作ることができる．ただし，銀河の後退速度にはハッブル膨張とは別の成分 (特異速度) が含まれるため，厳密な空間分布とは少しずれる．

なったりする．宇宙の幾何学テストとは，時空のこのような性質を利用して宇宙モデルを決めることである．絶対光度がほぼ一定の天体の見かけの等級 $m(z)$ や，一様に分布する天体の個数密度 $N(z)$ を調べることによって，宇宙の幾何学的な構造が原理的にはわかるのである．

1998 年に最も注目を集めた成果が，Ia 型超新星の m-z 関係から宇宙の加速膨張が示されたことである．幾何学テストとしての方法は特に新しいものではなく，銀河を対象にした観測は従来から行われていた．しかし，銀河の明るさにはばらつきがあり，進化による明るさの変化も無視できないため，系統誤差を小さくするには限界があった．一方，Ia 型超新星はきわめて明るいことに加えてその光学的性質がよくわかるようになり，標準光源として最も適していると考えられた (10 頁の脚注**参照).

Ia 型超新星の観測はしかし，決して容易なことではない．超新星爆発の起こる頻度が典型的な銀河内で約 300 年に 1 回と非常に小さいからである．この頻度の低い事象を捕らえようと，2 つのグループが独立に，ハッブル宇宙望遠鏡やケック望遠鏡をはじめ，多くの望遠鏡を駆使して数年間にわたる観測を行ってきた．アメリカ・ローレンスバークレー国立加速器研究所のパールマター (Perlmutter) らのグループと，オーストラリア・マウントストロムロ天文台のシュミット (Schmidt) らのグループである．前者のグループは $z = 0.18 \sim 0.83$ の超新星を 42 個観測し，宇宙膨張は加速的 ($q_0 < 0$) であると発表した (図 5.3)[46]．宇宙モデルについては

$$0.8\Omega_m - 0.6\Omega_\Lambda = -0.2 \pm 0.1 \tag{5.5}$$

という制限が導かれ，正の宇宙項の存在が示されたのである．特に，平坦な宇宙を仮定した場合は $\Omega_m \cong 0.28$ となる．後者のグループも，$z = 0.16 \sim 0.62$ の超新星 16 個および近傍の超新星 34 個のデータに基づき，ほぼ同じ結果を得ている[47]．

このほかの幾何学テストとしてよく用いられるのが，重力レンズ効果 (10 頁の脚注***を参照) を利用する方法である．遠方にあるクェーサーは，われわれとの間にある銀河の重力レンズ効果により多重像として観測されることがあるが，この現象の起こる確率が宇宙項に強く依存し，宇宙項が大きいほど頻度が

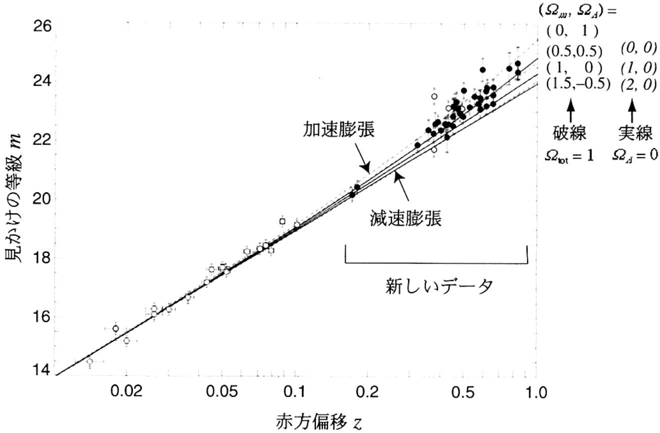


図 5.3　Ia 型超新星の見かけの等級 (m) と赤方偏移 (z) の関係．$z > 0.18$ の 42 個のデータがパールマターらの観測で新しく得られたもの．$z < 0.13$ のデータはハミュイ (Hamuy) らの観測値である[9)]［文献 46) より引用］

高くなることが示されている[48)]．これまでに観測されている重力レンズ現象から，複数の研究者により $\Omega_\Lambda \lesssim 0.6$ という制限が与えられており[49)]，宇宙項の存在にやや否定的なテストと考えられていた．しかし最近，千葉と吉井は，レンズ銀河の光度関数，クェーサーの光度関数等，レンズ統計において不定性のある諸要素を再検討し，$\Omega_m \cong 0.3$, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ のモデルが最も観測に合うと反論している[50)]．現在のところ，この方法から確定的な値を得ることは難しいが，超新星の観測等と無矛盾であるということはできる．

超新星の観測結果は，単純な原理に基づいているだけに信頼性は高いものの，銀河間ダストによる光の吸収効果，誕生した時刻 (宇宙年齢) による光学的性質の違いなど，信頼性を疑う批判もある．しかし，以下に紹介する **B-D** の観測結果や前節の議論を考え併せても，すべての結果を批判するよりも宇宙項の存在を認めることが自然な状況といえるだろう．ただし，宇宙項の存在は理論的にきわめて重大な問題であり，それについては第 6 章でコメントする．

B．宇宙背景放射の揺らぎ

CMB の揺らぎからインフレーションモデルに制限を与えられることは §4.4 で説明したが，宇宙モデルについても有力な情報を得ることができる．通常，天

球上の温度揺らぎ地図を球面調和関数で

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm} \tag{5.6}$$

と展開し，角度パワースペクトル $C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ を使って議論される．l と角度スケール θ のおよその関係は，$\theta \cong 200/l$ [度] である．杉山らは，CMB の揺らぎが生成される物理過程を系統的に調べ，C_l が何によって決まるかを明らかにした[51]．

まず，COBE の角度分解能は 7 度程度 ($l \sim 20$) であるので，これは地平線より大きい宇宙初期から存在する揺らぎだけを見ていることになる．この範囲で C_l が平坦であることは，インフレーションの予言するスケールの不変の揺らぎを表しているのである．

これに対し，音地平線*に入った揺らぎは放射圧により振動を始める．波長によって振動の始まる時刻が異なるので，時刻を固定して見ると波長ごとに山と谷ができる．そして，揺らぎの最大振幅は晴れ上がりの時刻の音地平線スケールになり，$l \cong 200/\sqrt{\Omega_{\rm tot}}$ に C_l のピークができるのである．ここで，ピークの位置が $\Omega_{\rm tot}$ に依存するのは，一定の揺らぎの長さを見込む角度が宇宙の幾何学的性質によって変わるためである．したがって，CMB の揺らぎスペクトル C_l が精度良く得られれば $\Omega_{\rm tot}$ が決まることになり，これも幾何学テストのひとつである．

地上観測や気球を使った観測によって，さらに小スケールの揺らぎが測定されている (図 5.4)．これまでの観測結果は

$$\Omega_{\rm tot} = \Omega_m + \Omega_\Lambda \cong 1 \tag{5.7}$$

を示唆しており，ほかの観測結果 (主に超新星の観測) と併せると，$\Omega_m \cong 0.3$, $\Omega_\Lambda \cong 0.7$ が確からしい値と考えられている[43,52]．式 (5.5) と (5.7) が示すように，超新星の観測と宇宙背景放射の観測は，宇宙モデルを決定する上で相補的な情報を与える．

これまでの COBE 以外の観測は天空のごく一部に限られていたので，さらに精度良く C_l のピークの位置を決めるためには，宇宙空間における 1 度以下

* ある宇宙時刻までに音波の到達できる距離．(音速)×(宇宙年齢)．

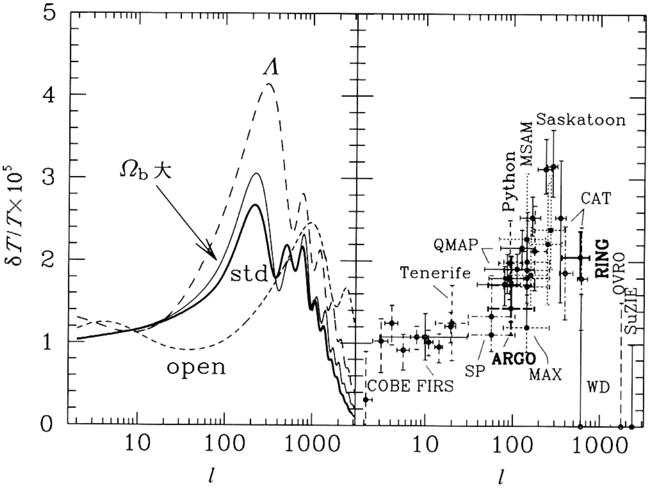


図 5.4 CMB 揺らぎの角度パワースペクトル．縦軸は $\delta T/T \equiv \sqrt{l(l+1)C_l/2\pi}$．左の図は CDM モデル (§5.3 参照) の理論曲線．std は $\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$ の場合，open は $\Omega_m = 0.1$, $\Omega_\Lambda = 0$ の場合，Λ は $\Omega_m = 0.1$, $\Omega_\Lambda = 0.9$ の場合を表す．右の図は観測結果．COBE, FIRAS 等は観測装置の名称 (京都大学の杉山直氏に提供していただいた)

のスケールの全天観測を行わなければならない．現在，2 つの衛星観測が準備中である．NASA が 2001 年に打ち上げる予定の MAP と，ヨーロッパ宇宙開発局が 2007 年に打ち上げる予定の PLANCK である．MAP では 0.5 度程度，PLANCK では 0.1 度程度の角度分解能をもつため，$l \sim 200$ のピークの位置はきわめて良い精度で決まると期待されている．

C. 宇宙年齢とハッブルパラメータ

宇宙年齢 t_0 とハッブルパラメータ H_0 の積は，Ω_m と Ω_Λ の関数で与えられる．つまり，一般に $H_0 t_0 = f(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ と書け，例えば $f(1,0) = 2/3$, $f(0,0) = 1$ となる．したがって，H_0 と t_0 の観測値から Ω_m と Ω_Λ を関係づけることができるのである．

ハッブルパラメータについては，§2.2 で述べたように $H_0 = 60 \sim 80$km/s/Mpc の範囲にあるとされている．一方，宇宙年齢の下限は主に球状星団の年齢によって与えられるが，$t_0 = 110 \sim 150$ 億年 という範囲に絞られている[53]．これら

の数値から，$H_0t_0 > 2/3$ となり*，$\Omega_m < 1$ または宇宙項の存在を意味することになる．

実は，以前からこのことは「宇宙年齢問題」という重大な問題とされていた．インフレーションからは $\Omega_{\rm tot} = 1$ が予言されている．宇宙項の存在を認めれば問題はないが，6 章で論じるように，得体の知れない宇宙項は導入したくないという思いが研究者にあったからである．オープンインフレーションモデルが注目された理由もここにある．しかし，宇宙項の存在が確からしくなってきた現状においては，あえて宇宙年齢問題といわれることもないだろう．もちろん，問題は全く解決されていないのだが．

D．天体の特異速度

各銀河は一様・等方なハッブル膨張からずれた速度成分をもっているが，これを特異速度という．特異速度の大きさは線形摂動理論において導出されており，特に球対称の密度分布については

$$v = \frac{1}{3}\Omega_m^{0.6} H_0 R\delta \tag{5.8}$$

となる．R は球の中心からの距離である．このように，特異速度は Ω_m に強く依存する一方で，Ω_Λ にはほとんどよらないという特徴がある．したがって，宇宙初期の微小な揺らぎの成長によって構造が形成されたならば，その速度場の観測から，原理的には Ω_m を求めることができるのである．なお，著者らは揺らぎの非線形効果を見るために球対称ボイド**モデルで特異速度を調べたが，非線形領域でも式 (5.8) がわりと良い近似になっていることを示した[54]．

ピーブルス (Peebles) は，銀河の現在の分布と初速度ゼロの初期条件から，「最小作用法」によってそれらの軌道を求め，速度場を得る方法を考案した[55]．そして，それを局所超銀河団の重力場中の局所銀河群の運動に適用することにより，$\Omega_m \cong 0.17$ という結果を得ている．

さらに，銀河団・ボイドスケールの大規模速度場から Ω_m を決定しようとする試みもなされており，銀河およびIa 型超新星の赤方偏移観測から，$\Omega_m > 0.3$ であるという結果が報告されている[56]．しかしながら，特異速度とは，天体の

---

* 100km/s/Mpc$\cong$ (100 億年)$^{-1}$ という換算を覚えておくと，この議論に便利である．

** 赤方偏移サーベイによる銀河分布地図を見ると，数 10 Mpc にわたり銀河のほとんど存在しない領域がたくさん分布している．この空洞領域をボイドと呼ぶ．

後退速度からその位置によるハッブル膨張速度を差し引いたものであるから，銀河の距離がきわめて良い精度で決定されなければならない．現状では，大規模速度場から Ω_m を精度良く決めることはできない．

なお，この特異速度場による宇宙モデルの制限は，先の **A-C** とは異なり Ω_m だけに与えるものである．ただし，例えば CMB の観測から $\Omega_{\mathrm{tot}} \cong 1$ というような制限と組み合わせると，局所銀河群の速度場から決まる Ω_m もまた宇宙項の存在を示唆することになる．

5.5　ダークマターの探査 I——MACHO

§5.2 で述べたように，ダークマターの一部がバリオンである可能性も残されているが，その場合，バリオンは重力により集められ天体を形成していると考えるのが自然である．もちろんダークマターというからには，ある程度以上の質量と数密度をもって分布し，電磁波の放射が全くないかきわめて微量な天体でなければならない．そのような未知の天体を，MACHO (MAssive Compact Halo Object) と呼んでいる．

1986 年にパチンスキー (Paczynski) は，電磁波で直接観測できない MACHO の存在を確認する方法を提案した[57]．遠方の星とわれわれの間を MACHO が通過すると，重力レンズ効果により一時的に星が増光するはずであるから，この現象の観測から MACHO の存在が確認できるという主張である．この増光現象は，銀河のレンズ効果によりクェーサーの多重像が見えるという現象 (§2.2, 5.4 を参照) と区別して，マイクロレンズ効果と呼ばれることもある．

上述の原理は単純であるが，マイクロレンズで起こる確率は 1 つの星について百万年に 1 回程度と非常に小さく，MACHO を見つけるためには数百万個の星を数年間観測し続けることが必要となる．この大変な観測を，米豪共同の MACHO，フランスの EROS，ポーランドの OGLE の 3 グループが行っていた．そして 1993 年，これら 3 グループは同時期に，重力レンズ効果による増光現象が大マゼラン星雲方向に観測されたことを発表したのである[58]．現在までに MACHO グループの捕らえた重力レンズ現象は 18 になり，その継続時間から質量は $M \sim 0.5 M_\odot$ ($M_\odot$ は太陽質量) と見積もられている[59]．

では，MACHO の正体は何だろうか．候補としては，質量が小さくて暗い星

(赤色矮星)，質量がもっと小さくて核反応を起こせない星 (褐色矮星)，星の核反応が終了した後に残される天体 (白色矮星，中性子星) が挙げられる．まず，赤色矮星については，ハッブル望遠鏡によるハローの観測から発見されず，存在してもハローの1％未満であると結論されている[60,61]．白色矮星についても，ハッブル望遠鏡によるハロー観測では見つかっていない[61]．しかも，白色矮星がMACHO だとすると，星の進化の理論から現在 $\sim 2M_\odot$ の星がたくさん存在することになり，観測と合わない[62]．中性子星は，超新星爆発の残骸として形成されるが，このときにまき散らされるヘリウムや重元素が多いと観測と矛盾することから，MACHO にはなり得ない[63]．

褐色矮星は $\sim 0.08M_\odot$ であり，推定されているMACHO の質量 $M \sim 0.5M_\odot$ とは一致しない．しかし，MACHO の質量は実は直接的観測量ではなく，その推定値はハローのモデルに依存している．ハローのモデルを修正すると $M \sim 0.1M_\odot$ となるという，本間・官谷の主張もあり[64]，結論は出ていない．

もうひとつの可能性は，ブラックホールである．$M \sim 0.5M_\odot$ のブラックホールは通常の星の重力崩壊によっては形成されないので，存在するとすれば初期宇宙にできたことになる．宇宙初期にブラックホールが形成されるようなインフレーションモデルも，横山らから提案されている[65]．現段階では，星かブラックホールか判断できないが，仮に後者であるならば，初期宇宙モデルまたは素粒子モデルについての新たな情報源となる．

観測的には，レンズ現象のデータを増やして質量分布をより正確にすることが重要である．そのためには，多くの望遠鏡で様々な方向を見ることが必要であるが，上記3グループは大マゼラン星雲方向に加えて小マゼラン星雲方向の観測も行い，結果を出し始めている[66]．また，日本・ニュージーランド共同のMOA (Microlensing Observations in Astrophysics) グループも，ニュージーランドのマウントジョン天文台で観測を進めている[67]．

5.6　ダークマターの探査 II——非バリオン粒子

§5.3 で述べたように，非バリオンダークマター粒子としては，ニュートリノ，アクシオン，超対称性粒子の3種類が候補となっている．このうち，ニュートリノの存在はすでに明らかであり，目標は質量の決定である．あとの2つは未

発見粒子であり，その存在を確認することが第一の目標である．

A．ニュートリノ

1998 年 6 月，スーパーカミオカンデ装置の大気ニュートリノ観測から，ニュートリノが質量をもつという結果が発表された[68)]．神岡では，1983 年からカミオカンデ装置によりニュートリノ観測を行ってきた．ニュートリノが水検出器を通過したときに発生するチェレンコフ光を捕らえることにより，宇宙から飛んでくるニュートリノを検出しようとするものである[69)]．1987 年には，超新星爆発によって発生したニュートリノを検出し，世界的に注目された．また，高エネルギー宇宙線が大気と衝突する際に発生する大気ニュートリノの観測では，$\nu_{\rm e}$ と ν_μ の強度比が理論値と大幅に異なることが報告されていたのである．この原因を調べるため，1996 年からスーパーカミオカンデ装置による大気ニュートリノの観測が始められていた．そして今回，2 年間の観測データから，地球の裏側から届く ν_μ の強度が上空からの強度の約半分になっていることを発見し，$\nu_\mu \to \nu_\tau$ のニュートリノ振動によるものと結論づけたのである．このことは，§3.4 で説明したように，ニュートリノが質量をもつ証拠となる．そして，振動の確率と式 (3.21) から，次の結果が得られている．

$$5 \times 10^{-4}{\rm eV}^2 < |m_{\nu_\tau}^2 - m_{\nu_\mu}^2| < 6 \times 10^{-3}{\rm eV}^2 \qquad (5.9)$$

ニュートリノが質量をもつことは決して意外な結果ではないが，20 年以上も実験と無矛盾であった標準理論を初めて超えた快挙であった．§5.3 で議論したように，宇宙の構造形成においてニュートリノが質量をもつ可能性が検討されてきたが，今回の結果によりさらに議論を煮詰めることが必要になった．

ダークマターとして寄与するためには $m_{\nu_i} \sim 10\,{\rm eV}$ の質量が必要であるので，問題はこれに比べてどうかということである．残念ながら，スーパーカミオカンデの実験からは世代間の関係 (5.9) しか得られていないので，それぞれの値については何もいえない．次の 2 つの可能性がある．ひとつは，ほかのクォーク・レプトンのように世代の階層性があり，$m_{\nu_\mu} \ll m_{\nu_\tau}$ となっていることである．その場合，式 (5.9) から $m_{\nu_\tau} \cong 0.05\,{\rm eV}$ となり，ダークマターとしての寄与は無視できる．もうひとつは $m_{\nu_\mu} \sim m_{\nu_\tau}$ という場合で，このときはダークマターである可能性が残る．

スーパーカミオカンデでは，大気ニュートリノ観測のほかに，太陽ニュートリノ観測も進行中である[70]．また，筑波の高エネルギー加速器研究機構からニュートリノを神岡に発射して振動の効果を調べる実験も進めている[71]．ヨーロッパの CERN やアメリカのフェルミ国立加速器研究所 (FNAL) における独立な実験と併せて，今後，質量についてさらに詳しい情報が得られるだろう．

B．アクシオン

アクシオンの質量については，超新星爆発で放出されたニュートリノの観測から上限が，現在の物質密度から下限が次のよう与えられている[72]．

$$1\mu\mathrm{eV} \lesssim m_a \lesssim 10\,\mathrm{keV} \tag{5.10}$$

このように，電子の質量 (0.5 MeV) の 9 桁以上も小さいが，宇宙初期に大量に作られるためにダークマターとなる可能性がある．

ダークマターアクシオンは，ほかの物質との相互作用が非常に弱いことから，最初は検出不可能と考えられた．ところが，1983 年にシキヴィエ (Sikivie) は，強磁場をかければアクシオンはマイクロ波の光子に変換され，検出可能であると主張した[73]．その光子を検出するためには，マイクロ波を共鳴させる大きな空洞を用意し，熱振動を消すために数 K に保つことが必要である．

アメリカ・ローレンスリヴァモア国立研究所のヴァンビバー (van Bibber) らのグループは，この方法で実験を行っている．質量が $1.5\mu\mathrm{eV} < m_a < 12.5\mu\mathrm{eV}$ の範囲を探査し，すでに $2.9 \sim 3.3\,\mu\mathrm{eV}$ の範囲には存在しないという結果を発表している[74]．また，京都大学の松木らのグループは，イオン化しやすいリュードベリ原子を受信機に用い，さらに高感度な装置を開発している[75]．

C．超対称性粒子

ダークマターとなりうる超対称性粒子は電気的に中性なスピン 1/2 の粒子で，ニュートラリーノと総称される．現在，宇宙空間を飛んでいるニュートラリーノを直接捕まえようとする実験が，欧米や日本の多くのグループによって行われている．ニュートラリーノは原子核より重いものの中性であるため，荷電粒子や光子にしか反応しない通常の検出器を鳴らすことはできない．そのため，衝突した原子核の運動からニュートラリーノの証拠を捕らえようとしている．衝突の起こる確率は，1 日に検出器物質 1kg あたり 1 回以下ときわめて小さい．

宇宙線から遮断するため実験装置は地下に設置されるが，周辺環境や検出器内で発生する自然放射能からも遮断する必要がある．

日本には，大阪大学の江尻らのグループと東京大学の蓑輪らのグループがある．大阪大学のグループは，原子核が運動する際に放出する光を観測するシンチレーター検出器を用いて，神岡鉱山で実験を行ってきた[76]．さらに，宇宙線や天然のラドンの影響を少なくするため，奈良県大塔トンネルに移設して実験を始めようとしている[77]．一方，東京大学のグループは，測定器物質 (フッ化リチウム) の微少な温度上昇から原子核のエネルギーを検出する方法をとっている[78]．これまでに東京で地上実験を重ね，千葉県鋸山の地下実験を準備中である．

ほかの実験から，ニュートラリーノの存在を示す間接的証拠が得られる可能性もある．スーパーカミオカンデやイタリアのグランサッソ研究所の宇宙線検出装置 MACRO では，太陽の中に捕らえられたニュートラリーノどうしが衝突・対消滅する際に生成する高エネルギーニュートリノを捕らえ，ニュートラリーノの存在を確認しようとしている[79]．また，アメリカの FNAL の加速器実験では，ニュートラリーノが作られたこと示す現象が起きたいうと報告があった[80]．ただし，観測されたのは一例であるため，今後の検証が待たれる．

6章　おわりに

近年の観測データから，宇宙を満たす質量密度の組成が次第に明らかになってきた．その結果，主に原子核を構成するバリオン ($\Omega_{\rm b} \sim 0.03$) は物質全体 ($\Omega_m \sim 0.3$) のごく一部に過ぎず，さらに，物質密度より大きい宇宙項 ($\Omega_\Lambda \sim 0.7$) が存在することが示唆されている．つまり，宇宙空間の大部分は未知の物質・エネルギーによって占められているのである．

5 章で論じてきたように，非バリオンダークマターの存在を示す理由は 2 つある．1 つは，宇宙論的観測による $\Omega_{\rm b}$ と Ω_m の差であり，それぞれの推定値の信頼性が上がったことが，ここ数年の観測の大きな成果である．もう 1 つは，宇宙の構造形成になくてはならないということであり，特に CDM は構造形成の標準モデルとなっている．その正体は不明であるが，ニュートリノ，アクシオン，超対称性粒子が有力な候補であり，それらはすべて素粒子の標準理論を超える手掛かりとなる．様々な新しい宇宙論的観測およびダークマター粒子の直接探査によって，正体はやがて明らかになるだろう．

宇宙項についても，宇宙年齢問題等においてその存在が論じられてきたが，超新星の観測から宇宙の加速膨張が示されたことにより，その可能性が現実味を帯びてきた．しかし，これまで多くの研究者がその存在を認めたがらなかったように，理論的には次の重大な問題がある．

- エネルギー密度にすると $\rho_\Lambda \sim \rho_{\rm cr} \sim (4\,{\rm meV})^4$ となるが，これは素粒子理論で現れるスケールに比べてずっと小さい．
- 物質の質量密度が $\rho_m \propto a^{-3}$ と減衰するのに対し，宇宙項に相当するエネルギー密度 ρ_Λ は一定である．それが，現在の時刻でたまたま

$$\rho_{\rm b} \sim \rho_m \sim \rho_\Lambda \sim \rho_{\rm cr} \tag{6.1}$$

となっているのは，きわめて不思議なことである．

ただし，後者の謎は問題を解く鍵になるかもしれない．全く関係をもたない物理量がたまたま同じ大きさであるとは考えにくい．何か物理的な理由が隠されている可能性がある．

宇宙項の問題について，ひとつ補足すべき点がある．そもそも宇宙項は，アインシュタインが定常宇宙を実現するために導入したものであり，宇宙膨張の発見により 1 度は破棄されたものであった．それが，観測事実を説明するために都合が良いということで，再び考えられるようになったのである．しかしながら，加速膨張を実現させるためには状態方程式が $P < -\rho c^2/3$ を満たす流体を仮定すればよく，正体が不明である以上宇宙項 ($P = -\rho c^2$ の流体) にこだわる理由はない．謎のエネルギーを宇宙項に限定せず，様々な可能性を視野に入れることが必要であろう[81)]．インフレーションを起こすスカラー場のエネルギーが残っているとする説もあり，宇宙項問題は，初期宇宙モデルを探る有力な手掛かりになるかもしれない[82)]．

過去の歴史が示すように，重大な問題に直面した後には大きく進展する可能性がある．現在，様々な観測計画が進行中であり，この先 10 年間には膨大な観測データが入ってくる．ダークマターと宇宙項の問題を糸口に，素粒子論も大きく進歩し，インフレーション宇宙論や量子宇宙論の解明が進むことを期待したい．

最後に，原稿を通読して有益なコメントを下さった杉山直氏 (京都大学理学部助教授) および横山順一氏 (大阪大学理学部助教授) に，感謝の意を表したい．また，深夜になりがちな執筆活動を支えてくれた妻・恵美に感謝する．

参考文献

原論文については，参考書にあまり解説のない比較的新しいもののみを挙げた．

1) 最近の成果を含む宇宙論の参考書として，
池内了：観測的宇宙論，東京大学出版会 (1997)
二間瀬敏史：なっとくする宇宙論，講談社 (1998)

2) 素粒子論的宇宙論を含む参考書として，
成相秀一，冨田憲二：一般相対論的宇宙論，裳華房 (1988)
小玉英雄：相対論的宇宙論，丸善 (1991)
佐藤文隆：宇宙物理 (岩波講座現代の物理学 **11**)，岩波書店 (1995)
E.W. Kolb & M.S. Turner : The Early Universe, Addison-Wesley (1990)

3) 素粒子物理の参考書として，
牧二郎，林浩一：素粒子物理，丸善 (1995)
戸塚洋二：素粒子物理 (岩波講座現代の物理学 **10**)，岩波書店 (1992)

4) 場の理論の参考書として，
西島和彦：場の理論，紀伊國屋書店 (1987)

5) 素粒子論的宇宙論の解説書として，
M. リョーダン，D.N. シュラム (青木薫訳)：宇宙創造とダークマター，吉岡書店 (1994)
横山順一：宇宙創生をさぐる，丸善 (1994)
解説記事として，M. ターナー (坂井伸之訳)：ビッグバン宇宙論を越えて，パリティ **12** No.9, 4 (1997)

6) インフレーション宇宙論の参考書として，
A. Linde : Particle Physics and Inflationary Cosmology, Harwood Academic Publishers (1990)

7) ダークマターの参考書として，
小玉英雄：宇宙のダークマター，サイエンス社 (1992)
須藤靖：ダークマターと銀河宇宙，丸善 (1993)

8) W. Freedman *et al.* : preprint astro-ph/9801080
S. Jha *et al.* : *Astrophys. J. Suppl.* **125**, 73 (1999)

9) M. Hamuy *et al.* : *Astron. J.*, **112**, 2391 (1996)

10) N.A. Grogin & R. Narayan : *Astrophys. J.*, **464**, 92 (1996)
E.E. Falco, I.I. Shapiro, L.A. Moustakas & M. Davis : *Astrophys. J.*, **484**, 70 (1997)

11) J.C. Mather *et al.* : *Astrophys. J.*, **512**, 511 (1999)

12) G.F. Smoot *et al.* : *Astrophys. J.*, **398**, L1 (1993)
C.L. Bennet *et al.* : *Astrophys. J.*, **464**, L1 (1996)

13) S. Burles, K.M. Nollett, J.N. Truran & M.S. Turner : *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4176 (1999)

14) ワインバーグ-サラム理論の参考書として,
長島順清 : ワインバーグ-サラム理論 (物理学最前線 **12**), 共立出版 (1985)

15) Particle Data Group : *Eur. Phys. J., C* **3**, 1 (1998)

16) T. Mori : Dark Matter in the Universe and its Direct Detection, ed. M. Minowa, Universal Academy Press, p.59 (1997)

17) 久野純治, 村山斉 : 日本物理学会誌 **49**, 186 (1994)
岡田安弘, 山口昌弘 : 日本物理学会誌 **50**, 362 (1995)

18) 戸塚洋二 : 日本物理学会誌 **48**, 607 (1993)

19) 位相欠陥の参考書として,
A. Vilenkin & E.P.S. Shellard : Cosmic Strings and Other Topological Defects, Cambridges Univ. Press (1994)

20) 長澤倫康 : 日本物理学会誌 **50**, 355 (1995)

21) D. La & P.J. Steinhardt : *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 376 (1989)

22) スカラー・テンソル重力理論の参考書として,
藤井保憲 : 重力とスカラー場, 講談社 (1997)

23) D. La, P.J. Steinhardt & E.W. Bertschinger : *Phys. Lett., B* **231**, 231 (1989)
E.J. Weinberg : *Phys. Rev., D* **40**, 3950 (1989)

24) N. Sakai & K. Maeda : *Phys. Rev., D* **48** 5570 (1993); *Prog. Theor. Phys.*, **90**, 1001 (1993)

25) J.D. Barrow & K. Maeda : *Nucl. Phys., B* **341**, 294 (1990)
P.J. Steinhardt & F.S. Accetta : *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 2740 (1990)
R. Holman, E.W. Kolb & Y. Wang : *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 17 (1990)

26) A. Linde : *Phys. Lett., B* **327**, 208 (1994)
A. Vilenkin : *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3137 (1994)

27) N. Sakai, H. Shinkai, T. Tachizawa & K. Maeda : *Phys. Rev., D* **53** 655 (1996)
N. Sakai, J. Yokoyama & K. Maeda : *Phys. Rev., D* **59**, 103504 (1999)

28) N. Sakai : *Phys. Rev., D* **54** 1548 (1996)
N. Sakai, K. Nakao & T. Harada : preprint gr-qc/9909027

29) J. Ellis, N. Kaloper, K.A. Olive & J. Yokoyama : *Phys. Rev., D* **59**, 103503 (1999)

Izawa K.-I., M. Kawasaki & T. Yanagida : *Prog. Theor. Phys.*, **101**, 1129 (1999)
N. Sakai & J. Yokoyama : *Phys. Lett., B* **456**, 113 (1999)
30) K. Sato, H. Kodama, M. Sasaki & K. Maeda : *Phys. Lett.*, **108B**, 103 (1982)
佐藤勝彦 : 宇宙はわれわれの宇宙だけではなかった, 同文書院 (1991)
31) S. Coleman & F.De Luccia : *Phys. Rev., D* **21**, 3305 (1980)
32) T. Tanaka & M. Sasaki : Proc. 6th Workshop on General Relativity and Gravitation, eds. H. Ishihara et al. (Tokyo Institute of Technology), p.226 (1996)
33) J.R. Gott III : *Nature*, **295**, 304 (1982)
34) M. Sasaki, T. Tanaka, K. Yamamoto & J. Yokoyama : *Phys. Lett., B* **317**, 510 (1993)
M. Bucher, A.S. Goldhaber & N. Turok : *Phys. Rev., D* **52**, 3314 (1995)
A. Linde : *Phys. Lett., B* **351**, 99 (1995)
35) T. Tanaka : Particle Cosmology, eds. K. Sato et al., Universal Academy Press, p.33 (1998)
36) 佐藤勝彦 : 数理科学 **410**, 5 (1997)
佐藤文隆 : パリティ **13** No.9, 65 (1998)
37) M. Fukugita, C.J. Hogan & P.J.E. Peebles : *Astrophys. J.*, **503**, 518 (1998)
38) R.G. Carlberg, H.K.C. Yee & E. Ellingson : *Astrophys. J.*, **478**, 462 (1997)
39) S. Burles & D. Tytler : *Astrophys. J.*, **499**, 699 (1998); **507**, 732 (1998)
40) S.A. Levshakov, W.H. Kegel & F. Takahara : *Astrophys. J.*, **499**, L1 (1998);[35)]と同じ本, p.105
41) K.A. Olive : preprint astro-ph/9903309
42) H.J. Mo & M. Fukugita : *Astrophys. J.*, **467**, L9 (1996)
J.R. Primack & M.A.K. Gross : preprint astro-ph/9810204
43) M. Turner : Black Holes and High Energy Astrophysics, eds. H. Sato & N. Sugiyama, Universal Academy Press, p.87 (1998)
44) J. Loveday & J. Pier : preprint astro-ph/9809179
45) S. Folkes *et al.* : *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **308**, 459 (1999)
46) S. Perlmutter *et al.* : *Nature*, **391**, 51 (1998); *Astrophys. J.*, **517**, 565 (1999)
47) P.M. Garnavich *et al.* : *Astrophys. J.*, **493**, L53 (1998)
A.G. Riess *et al.* : *Astron. J.*, **116**, 1009 (1998)
C.J. ホーガン, R.P. カーシュナー & N.B. サンツェフ (山田章一訳) : 日経サイエンス 1999 年 4 月号, p.40

48) M. Fukugita, T. Futamase & M. Kasai : *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **246**, 24p (1990)
E.L. Turner : *Astrophys. J.*, **365**, L43 (1990)
49) J. Kochanek : *Astrophys. J.*, **466**, 638 (1996)
D. Maoz & H.-W. Rix : *Astrophys. J.*, **416**, 425 (1993)
50) M. Chiba & Y. Yoshii : *Astrophys. J.*, **510**, 42 (1999)
51) W. Hu, N. Sugiyama & J. Silk : *Nature*, **386**, 37 (1997)
杉山直 : 数理科学 **410**, 12 (1997)
52) C.H. Lineweaver : *Astrophys. J.*, **505**, L69 (1998)
G. Efstathiou : *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **303**, L47 (1999)
53) B. Chaboyer : *Phys. Rep.*, **307**, 23 (1998)
R. Jimenez : preprint astro-ph/9810311
54) N. Sakai, K. Maeda & H. Sato : *Prog. Theor. Phys.*, **89**, 1193 (1993)
N. Sakai & P. Haines : preprint astro-ph/9909183
55) P.J.E. Peebles : *Astrophys. J.*, **362**, 1 (1990)
E.J. Shaya, P.J.E. Peebles & R.B. Tully : *Astrophys. J.*, **454**, 15 (1995)
56) I. Zehavi & A. Dekel : *Nature*, **401**, 252 (1999)
57) B. Paczyński : *Astrophys. J.*, **304**, 1 (1986)
58) C. Alcock *et al.* : *Nature*, **365**, 621 (1993)
E. Aubourg *et al.* : *Nature*, **365**, 623 (1993)
E. Udalski *et al.* : *Acta Astron.*, **43**, 289 (1993)
59) W. Sutherland : *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 421 (1999)
60) J.N. Bahcall, C. Flynn, A. Gould & S. Kirhakos : *Astrophys. J.*, **435**, L51 (1994)
D.S. Graff & K. Freese : *Astrophys. J.*, **456**, L49 (1996)
61) C. Flynn, A. Gould & J.N. Bahcall : *Astrophys. J.*, **466**, L55 (1996)
62) G. Chabrier, L. Segretain & D. Mera : *Astrophys. J.*, **468**, L215 (1996)
F.C. Adams & G. Laughlin : *Astrophys. J.*, **468**, 586 (1996)
63) D. Ryu, K.A. Olive & J. Silk : *Astrophys. J.*, **353**, 81 (1990)
64) M. Honma & Y. Kan-ya : *Astrophys. J.*, **503**, L139 (1998)
65) J. Yokoyama : *Astron. Astrophys.*, **318**, 673 (1998); *Phys. Rev. D*, **58**, 083510 (1998)
M. Kawasaki, N. Sugiyama & T. Yanagida : *Phys. Rev. D*, **57**, 6050 (1998)
66) C. Alcock *et al.* : *Astrophys. J.*, **491**, L11 (1997)
67) P. Yock :[43]と同じ本, p.375
村木綏 : パリティ **13** No.7, 56 (1998)
68) Y. Fukuda et al.(Super-Kamiokande Coll.) : *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 1562

(1998)
梶田隆章：日本物理学会誌 **53**, 783 (1998)
69) ニュートリノ天文学の解説書として，
中村健蔵：ニュートリノで探る宇宙，培風館 (1994)
70) Y. Fukuda et al.(Super-Kamiokande Coll.) : *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1810 (1999)
71) 西川公一郎：数理科学 **428**, 36 (1999)
72) G.G. Raffelt : preprint hep-ph/9805400
73) P. Sikivie : *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1415 (1983)
74) L.J. Rosenberg & K.A. van Bibber :[16)]と同じ本，p.181
G. Hagmann *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2043 (1998)
75) I. Ogawa *et al.* :[16)]と同じ本，p.175
76) T. Kishimoto *et al.* :[16)]と同じ本，p.71
K. Fushimi *et al.* :[16)]と同じ本，p.115
77) H. Ohsumi *et al.* :[16)]と同じ本，p.25
78) M. Minowa *et al.* :[16)]と同じ本，p.77
79) M. Ambrosio *et al.*(MACRO Coll.) : *Phys. Rev., D* **60**, 082002 (1999)
80) G.L. Kane :[16)]と同じ本，p.31
81) P.J.E. Peebles & B. Ratra : *Astrophys. J.*, **325**, L17 (1988)
Y. Fujii & T. Nishioka : *Phys. Rev., D* **42**, 361 (1990)
K. Sato, N. Terasawa & J. Yokoyama : The Quest for the Fundamental Constants in Cosmology, eds. J. Audouze & J. Tran Thanh Van, Editions Frontieres, p.193 (1990)
M.S. Turner & M. White : *Phys. Rev., D* **56**, 4439 (1997)
T. Chiba, N. Sugiyama & T. Nakamura : *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **301**, 72 (1998)
I. Zlatev, L. Wang & P.J. Steinhardt : *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 896 (1999)
82) 宇宙項の解説記事として，
坂井伸之：天文月報 **92**, 502 (1999)

不規則電子系の金属-絶縁体転移

大槻東巳

1章 はじめに

1.1 相 転 移

非常に単純なハミルトニアンで記述される系でも，自由度が大きくなると全く予想のできない振る舞いを示す．そのよい例としてよく知られているのは，古典力学の多体問題である．古典力学では2体問題までは完全に解けているが，3体問題となると解がカオティックな振る舞いを示す場合がある．最近流行りの複雑系もこの例のひとつである．自由度が大きくなっただけで，少数の粒子系と根本的に異なる振る舞いが見られ，それゆえ多自由度系を記述する物理は本質的に少数自由度系の物理と区別するべきであることは，アンダーソンの “More is different.” という言葉に象徴される[1)]．

自由度が増えたことで系の様子が変わる現象のうち，一番顕著なのは相転移であろう．水分子は少数ではただの分子の集まりであるが，これが増えると氷 - 水，水 - 水蒸気などの相転移が見られる．通常，相転移は自由エネルギーを温度に関して微分したときの不連続性から分類される．系の構造が変化し，自由エネルギーの1階微分，すなわちエントロピーがある温度で不連続に変化するのは1次相転移であり，磁気相転移のようにエントロピーは連続であるが，自由エネルギーを2階微分して得られる比熱が不連続に変化するのは2次相転移である．

上で述べた相転移は，温度によって揺らぎ(エントロピー)が変化して起こる相転移である．一方，絶対零度においても電子濃度や圧力などのパラメータを変化させると，量子的揺らぎが変化し，そのため秩序－無秩序転移が起こることがある．これは量子相転移と呼ばれ，最近注目を集めている．この量子相転移の仲間のひとつ，不規則電子系の示す金属 - 絶縁体転移の理論と実験を概観

し，このホットな話題を紹介するのがこの解説の目的である．

1.2　金属－絶縁体転移

相転移のうちでも氷と水との相転移などは日常的に見なれたものである．一方，身の回りのものを眺めてみると，われわれがいかに電気を使っているかがよくわかる．それゆえ伝導体がパラメータを変えていくと絶縁体に転移するという現象は大変興味深いもので，事実多くの研究が精力的になされている．一口に金属－絶縁体転移といっても，そのメカニズムはいろいろである．それぞれを簡単に眺めよう．

不純物を含まない結晶中では，電子は周期ポテンシャルを感じながら運動する．周期を $\boldsymbol{a}$ とすると，波動関数はブロッホの定理より周期 $\boldsymbol{a}$ の関数 u と波数 $\boldsymbol{k}$ の平面波の積

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1}$$

と書け，エネルギーバンド $E(\boldsymbol{k}, n)$ が形成される．力 $\boldsymbol{F}$ が働くと電子は

$$\hbar\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1.2}$$

に従って運動する．

電子がバンドを中途半端に占有しているところに電場をかけたとする（図 1.1(a)）．このとき，電子は式 (1.2) により電場方向に加速され，不純物によってあるところで加速がとまり定常状態に落ち着く．この電子の分布は波数が正と負で非対称な形になり電流が流れ，金属的な伝導を示す（図 1.1(b)）．一方，あるバンドまでは電子がすべての状態を占有しており，それより上のバンドに

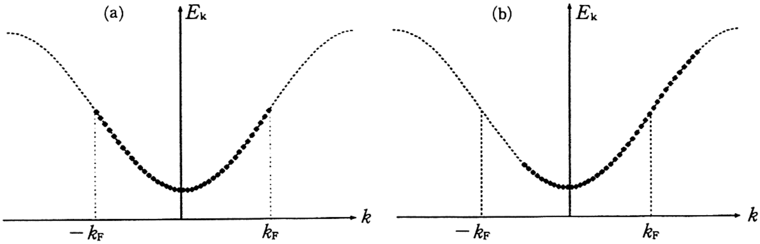


図 1.1　バンド中の電子の運動．金属の場合，バンドが中途半端にしかつまっていない．電場をかけると $k>0$ と $k<0$ の電子数にアンバランスが生じ，電流が流れる

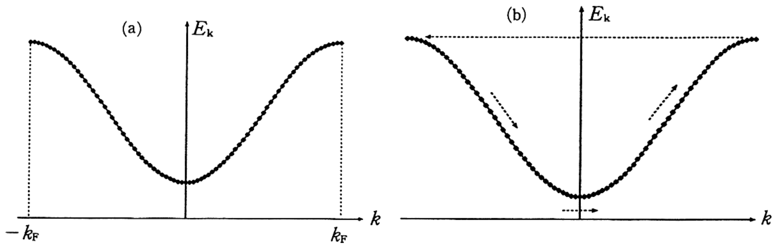


図 1.2　バンドの電子の運動．絶縁体の場合，電場をかけても $k > 0$ と $k < 0$ の電子数は同じままで電流は流れない

は電子が全く入ってないとき(図1.2(a))，つまりフェルミ・エネルギーがバンドギャップにあるときは，バンドの端にきた電子はバンドギャップを越えられず，それと同等の反対側の点に戻されて，結局電子の占有され具合は変わらない(図1.2(b))．よって電場をかけても電流は流れず，系は絶縁体となる．

例えば1次元の場合，バンド端は $\pm\pi/a$ であり，系のサイズが L のとき波数は $2\pi/L$ の整数倍に量子化されるので，スピンの縮重度を考えて $2L/a$ 個の電子をひとつのバンドにつめられる．L/a は格子点の数なので，格子点に置かれた原子が電子を偶数個供給すればバンドは完全に占有され，系は絶縁体になる．一方，電子を奇数個しか供給しなければバンドは中途半端にしか占有されず系は金属になる．

実際の物質ではバンド構造が複雑であり，異なるエネルギーバンドがエネルギー的に重なる可能性がある．この場合，偶数個の電子を各格子点が供給していてもバンドは中途半端にしか占有されず，系は金属になる．圧力などをかけて，バンド構造が変化しエネルギーギャップがつぶれ，絶縁体から金属へ転移する現象をバンド交差型の金属-絶縁体転移と呼ぶ．

では，電子が格子点の偶数倍でなかったら，その物質は必ず金属になるのであろうか？　これには多くの例外がある．電子と格子の相互作用，電子どうしの相互作用によりフェルミ・エネルギーのところでバンドギャップが自然に開き，系が絶縁体になるのである．

A．パイエルス転移

例えば，電子が図1.3のようにバンドを中途半端に占有していたとしよう．1次元の場合を考え，電子はフェルミ波数 $\pm k_F$ までつまっているとする．もし，

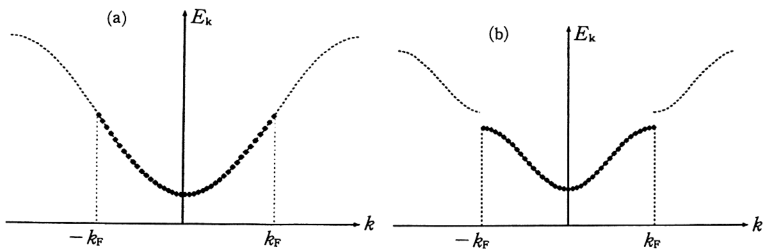


図 1.3　パイエルス転移．フェルミ波数 k_F までつまっている状況で，格子が自発的に波数 $2k_F$ の周期で歪むとギャップが開く

格子が自発的にひずみ波数 $2k_F$ のポテンシャルができたら，電子はフェルミ面のところでバンドギャップをもつ．問題は，この波数 $2k_F$ のひずみが生じるかどうかである．フェルミ面のところでギャップが開けば，電子のエネルギーは下がるが，格子ひずみのため，結晶の弾性エネルギーは増大する．もし，電子系のエネルギーの下がりが結晶の弾性エネルギーに打ち勝てば，格子は自然にひずんでフェルミ波数のところにギャップが開き，系は絶縁体になる．これは特に 1 次元系に見られ，パイエルス (Peierls) 転移と呼ばれるものである[2)]．

B．モット転移

パイエルス転移が電子と格子の相互作用から生ずるのに対して，モット転移は電子間相互作用によって起こる．もともと，結晶中の電子はイオン化した原子サイトにいる傾向にある．電子間のクーロン反発力が強いと，この傾向がますます強くなり電子は身動きできなくなる．これがモット (Mott) 転移である．典型的なのが電子が各格子点にひとつずつ存在する場合である．バンド描像ではこの系は金属であると予想される．しかし，電子間相互作用が強い場合は，隣の原子上の電子からの斥力により，それぞれの電子は各原子上に局在せざるをえなくなり，系は絶縁体になる．

この場合もフェルミ・エネルギーのところにギャップがある．他の電子からの相互作用を考えなければ，電子は幅 W のエネルギーバンドを形成する．同じサイトに電子が 2 個いるとき，ひとつの場合と比べてクーロン・エネルギーが U だけあがるとする．ちょうど原子サイトあたりにひとつずつ電子がいるところに，さらに電子をひとつ加えると，この電子はどのサイトにあってもエネ

ルギー U だけあがるので，結局バンドギャップは

$$U - W$$

程度と見積もることができる．圧力などを変えてこの値が正になったとき，系は金属から絶縁体へと転移するのである．

電子は少しでもエネルギーを低くしようとし，なるべく隣のサイトに広がり位置の不確定性を増して，運動エネルギーを下げる．その際，隣り合う電子のスピンはパウリ原理により反対向きでなければならない．これが磁気的相互作用を引き起こす．モット転移はこのように磁性と深いかかわりがある．最近，モット転移点付近の磁性や電気伝導の振る舞いが注目を集めている[3)]．

C. ウィグナー転移

パイエルス転移もモット転移も結晶の格子構造が表に出てきたが，電子間相互作用が強い場合，自由空間中の電子でも互いのクーロン力により身動きがとれなくなる場合がある．どのような条件を満たしたとき，これの転移が生じるか，簡単に見てみよう．

電子密度を n とする．電子ひとつが占める空間の半径を r_0 とすると，r_0 は空間次元を d として

$$nr_0^d \approx 1$$

から

$$r_0 \approx n^{-1/d} \tag{1.3}$$

となる．これより，平均的な電子間クーロン反発エネルギー V_c は

$$V_\mathrm{c} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sim n^{1/d} \tag{1.4}$$

と見積もられる．

一方，電子の平均的な運動エネルギー K は，温度がフェルミ温度よりも十分高ければ

$$K = \frac{d}{2} k_\mathrm{B} T \tag{1.5}$$

となり，温度がフェルミ温度よりも小さい場合

$$K \approx \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r_0^2} \tag{1.6}$$

と評価できる．

ここでクーロン・エネルギーと運動エネルギーの比

$$\Gamma = \frac{V_{\mathrm{c}}}{K} \tag{1.7}$$

を定義する．この値が Γ_{m} よりも大きければ，クーロン力が強く電子は動けなくなり，電子結晶ができ，系は絶縁体となる．これはウィグナー結晶と呼ばれる[4)]．反対に Γ が小さければ電子は動くことができ，系は金属となる*．

温度がフェルミ温度よりも大きければ

$$\Gamma \sim n^{1/d}/T \tag{1.8}$$

となり，電子密度が高いほど，ウィグナー結晶ができやすい．逆に温度がフェルミ温度よりも低いと

$$\Gamma \sim r_0 \sim n^{-1/d} \tag{1.9}$$

となり，電子密度が小さいときウィグナー結晶が生じる．この場合，電子のボーア半径 $a_{\mathrm{B}} = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ を使うと，Γ は r_0/a_{B} に比例していることがわかる．この無次元量

$$r_s = r_0/a_{\mathrm{B}} \tag{1.10}$$

が絶対零度でウィグナー結晶ができるかどうかを決める重要なパラメータとなる．

D．アンダーソン転移

以上の金属－絶縁体転移は系に不純物が存在しないという理想化された状況を考えていた．実際の系では必ず，何らかの格子欠陥や不純物イオンなどによるランダムポテンシャルが存在している．そこで，このような不規則性が伝導度にどのような効果を示すかを考察してみよう．

不純物ポテンシャルによる散乱がある場合，系の電気伝導度は以下のように現象論的に評価できる．電子の質量を m，散乱時間を τ とすると，電場 $\boldsymbol{E}$ の中

---

* 系に不純物がなければ，ウィグナー結晶全体がスライドして電流を運べるが，実際は不純物イオンにつかまってしまい，ある程度強い電場をかけてやらないと電流は流れない．この事情はパイエルス転移でも同じである．パイエルス転移では格子のひずみにともない電荷密度波(charge density wave, CDW)ができる．CDW はスライドすることで電荷の担い手となるが，やはり不純物につかまってしまうのである．こうした現象を “ピン止め” と呼ぶ．

で電子は運動方程式

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -e\boldsymbol{E} - m\boldsymbol{v}/\tau$$

に従う．定常状態では $\boldsymbol{v} = -e\tau\boldsymbol{E}/m$ である．電子密度を n とすると電流密度 $\boldsymbol{j}$ は $\boldsymbol{j} = n(-e)\boldsymbol{v}$ となるので，結局

$$\sigma = \boldsymbol{j}/\boldsymbol{E} = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{1.11}$$

となる．これがドルーデ(Drude)の公式である．τ を見積もるため，具体的にハミルトニアン

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) \tag{1.12}$$

を考えよう．$V(\boldsymbol{r})$ を摂動として取り扱い，フェルミの黄金律を用いると，状態密度 $\rho(E)$ を使って

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle\boldsymbol{p}'|V(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{p}\rangle|^2\rho(E) \tag{1.13}$$

を得る．$V(\boldsymbol{r})$ の行列要素を計算するため

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_i W\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{1.14}$$

としよう．不純物の位置 $\boldsymbol{r}_i$ はランダムとする．単位体積あたりの不純物の数を n_i とおくと

$$\begin{aligned}|\langle\boldsymbol{p}'|V(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{p}\rangle|^2 &= W^2\sum_{i,j}\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)) \\ &= n_iW^2\end{aligned}$$

となる．ここで $i \neq j$ の項の和は位相がランダムになるため 0 になるとした．よって

$$\tau \sim \frac{1}{n_iW^2} \tag{1.15}$$

となる．伝導度は結局

$$\sigma \sim \frac{1}{n_iW^2}$$

となる．n_i や W を増大させるとポテンシャル散乱が強まり，τ は減少し伝導度は下がるが，伝導度が消失し絶縁体になるという結果は得られない．

しかし実際には，不純物の強さや濃度を上げていくと，これらが有限のところで伝導度は0になるのである．この相違はドルーデ伝導度を導く議論で，電子の波動性を無視してたことに起因している．波がランダムな散乱体の中に入っていくと，複雑な干渉が起き定在波が生じることがある．海辺にテトラポッドがおいてあると，波が散乱されて浜辺に到達できなくなることを想像すれば，これは容易に理解できる．このように電子が波だと考えると，不純物による多重散乱で定在波ができ，電流を運べなくなり，n_i や W が有限でも系は絶縁体に転移する可能性がある．これを初めて指摘したのがアンダーソンで[5]，以来この現象はアンダーソン転移と呼ばれている．今まで見てきた転移は，いずれもフェルミ面にギャップが生じ，状態密度が消失している．一方，アンダーソン転移では，状態密度は異常を示さない．

アンダーソン転移という概念は，原理的にはランダムな媒質を伝播するあらゆる波に対して適用できるものである．ランダムな系は物理的な性質もでたらめに振る舞うような印象を受けてしまうが，決してそうでなく非常に規則的で美しい普遍的な性質が見られる．以下の解説でその一端に触れていただければ幸いである．

2章 アンダーソン転移の一般論

本章では不規則電子系におけるアンダーソン転移の最近の数値計算について解説する．一部，本シリーズの解説[6,7]と重複する個所があるが，そこはなるべく簡単にしかし本解説が自己完結しているように記述する．

2.1 スケーリング理論

アンダーソン転移とは絶対零度での電気伝導度σが電子密度，フェルミ・エネルギー，ポテンシャルの揺らぎ，圧力などを変えたときに消失する量子相転移である．この変化させるパラメータをxとすると，電気伝導度の消失は

$$\sigma(x) \sim (x_{\mathrm{c}} - x)^s, \quad \text{もしくは} \quad \sigma(x) \sim (x - x_{\mathrm{c}})^s \tag{2.1}$$

という形で特徴づけられる．絶縁体側では電子は不規則ポテンシャルによる多重散乱で指数関数的に局在しているであろう．このとき波動関数のすそは一般に

$$\Psi(\boldsymbol{x}) \sim \exp(-|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|/\xi_{\mathrm{loc}}) \tag{2.2}$$

となっている(図2.1)．$\boldsymbol{x}_0$は局在中心でξ_{loc}は局在長である．局在長は臨界点に近づくと発散するとして，臨界指数ν_{loc}を

$$\xi_{\mathrm{loc}} \sim \frac{1}{(x - x_{\mathrm{c}})^{\nu_{\mathrm{loc}}}}, \quad \text{もしくは} \quad \frac{1}{(x_{\mathrm{c}} - x)^{\nu_{\mathrm{loc}}}} \tag{2.3}$$

で定義する*．

はじめに4人組のスケーリング理論[8]と呼ばれるものを簡単に紹介しておこう．一辺がLの系の電気伝導度σを無次元化して，コンダクタンス

$$g(L) = \frac{2\pi\hbar}{e^2} L^{d-2} \sigma(L) \tag{2.4}$$

---

*例えば，xをランダムポテンシャルの強さWとすると，$x > x_{\mathrm{c}}$が絶縁体領域となる．xをフェルミ・エネルギーEとすると，逆に$x < x_{\mathrm{c}}$が絶縁体領域となる．

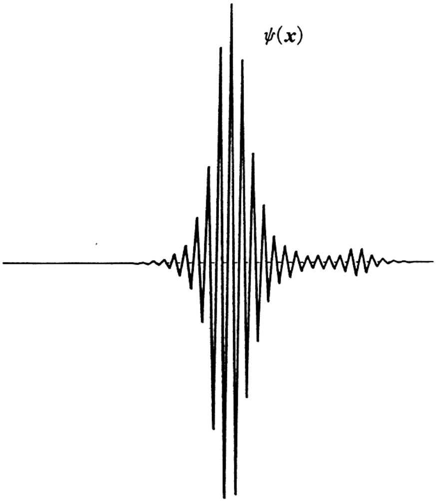


図 2.1　ランダムポテンシャル中の局在した波動関数．中心から離れるにつれて振動しながら減衰する．包絡線の形は $e^{-x/\xi}$ となり，これから局在長が定義される

を定義する*．

さて，このコンダクタンス $g(L)$ であるが，これを系のサイズ L と，波動関数を特徴づける長さのスケールをもった量 ξ の比だけで決まっているとし

$$g(L) = f(L/\xi) \tag{2.5}$$

と仮定する．絶縁体側では ξ は波動関数の局在長 $\xi_{\rm loc}$ である．一方，金属側では ξ は波動関数がたまたま，平均的振幅からずれたときに，もとの振幅に回復する距離，いわゆる相関長 $\xi_{\rm ext}$ と解釈できる．この 2 つの関係を見てみよう．$g(L)$ は有限系では x の解析的な関数だと仮定し，これを $x_{\rm c}$ のまわりで展開すると

$$g(L) = a_0(L) + a_1(L)(x - x_{\rm c}) + a_2(L)(x - x_{\rm c})^2 + \cdots$$

となる．仮に $x > x_{\rm c}$ を金属側とすると，$\xi_{\rm ext} = \xi_0/(x - x_{\rm c})^{\nu_{\rm ext}}$ として

* 式 (2.4) の係数を $2\pi\hbar/e^2$ でなく $2\pi^2\hbar/e^2$ とした方が摂動展開の展開係数がきれいになるので，後者を用いる文献も多いが，ここでは後述のランダウアー（Landauer）公式との対応から前者を用いる．

$$g(L) = f_1(L/\xi_{\text{ext}}) = f_1(L(x-x_{\text{c}})^{\nu_{\text{ext}}}/\xi_0)$$
$$= b_0 + b_1 \left(\frac{L}{\xi_0}\right)^{1/\nu_{\text{ext}}} (x-x_{\text{c}}) + b_2 \left(\frac{L}{\xi_0}\right)^{2/\nu_{\text{ext}}} (x-x_{\text{c}})^2 + \cdots$$

絶縁体側では $\xi_{\text{loc}} = \xi_0'/(x_{\text{c}}-x)^{\nu_{\text{loc}}}$ として

$$g(L) = f_2(L/\xi_{\text{loc}}) = f_2(L(x_{\text{c}}-x)^{\nu_{\text{loc}}}/\xi_0')$$
$$= c_0 + c_1 \left(\frac{L}{\xi_0'}\right)^{1/\nu_{\text{loc}}} (x_{\text{c}}-x) + c_2 \left(\frac{L}{\xi_0'}\right)^{2/\nu_{\text{loc}}} (x_{\text{c}}-x)^2 + \cdots$$

となる．これより

$$a_0(L) = b_0 = c_0 \ , \ a_1(L) = b_1 \left(\frac{L}{\xi_0}\right)^{1/\nu_{\text{ext}}} = -c_1 \left(\frac{L}{\xi_0'}\right)^{1/\nu_{\text{loc}}} , \cdots$$

が導かれる．これがあらゆる L について成り立つことから

$$\nu_{\text{loc}} = \nu_{\text{ext}} \equiv \nu \tag{2.6}$$

ということがわかるので，今後，この局在長，相関長の臨界指数は区別しないで ν と記す．こうしてコンダクタンスは

$$g(L) = g_{\text{c}} + a_1(x-x_{\text{c}})L^{1/\nu} + a_2(x-x_{\text{c}})^2 L^{2/\nu} + \cdots \tag{2.7}$$

と展開できる．右辺第 1 項は転移点 $x = x_{\text{c}}$ でのコンダクタンスの値なので，これを g_{c} とおいた．

ではサイズ L を大きくしたとき，$g(L)$ はどのような振る舞いを示すか，この式から予想してみよう．サイズ依存性を調べるのであるから式 (2.5) を L で微分してみればよい．サイズの変化はその絶対値よりも相対変化の方が意味があるので，サイズの対数に関する微分を考え

$$\frac{\mathrm{d}\log g}{\mathrm{d}\log L} = \beta(L,\xi) \tag{2.8}$$

とおく．$y = L/\xi = f^{-1}(g)$ とすると，式 (2.5) より

$$\frac{\mathrm{d}\log g}{\mathrm{d}\log L} = \frac{y}{g}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$$

となるので結局，右辺は g だけの関数となり

$$\frac{\mathrm{d}\log g}{\mathrm{d}\log L} = \beta(g) \tag{2.9}$$

が得られる．

では $g \gg 1, g \ll 1$ の極限を考えよう．$g \ll 1$ の場合，ポテンシャル揺らぎによる強い散乱があり，波動関数は式 (2.2) のように局在している．伝導度は系の端と端に電極をつけたとき，どの程度電流が透過するかを表しているので，その L 依存性は

$$g \sim |\Psi(L)^*\Psi(0)|^2 \sim \mathrm{e}^{-2L/\xi_{\mathrm{loc}}} \tag{2.10}$$

であろう．よって

$$\beta(g \ll 1) = \log g \tag{2.11}$$

となる．

金属側では伝導度はサイズに依存しない．これより式 (2.4) から $g \sim L^{d-2}$ になるので

$$\beta(g \gg 1) = d - 2 \tag{2.12}$$

となる．2 次元からのずれ

$$\epsilon = d - 2 \tag{2.13}$$

を定義すると

$$\beta(g) \approx \begin{cases} \log g & , \quad g \ll 1 \\ \epsilon & , \quad g \gg 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

となる．ここからいえることは，まず次元が 2 よりも大きければ $\beta(g)$ は必ず 0 になる点をもつということである．この $\beta(g) = 0$ となるコンダクタンスを系が示すとき，コンダクタンスはサイズを大きくしても，減りもせず増えもしない．式 (2.7) よりこれは $g = g_{\mathrm{c}}$ のときに起こる．もし g_{c} よりもコンダクタンスが大きくなれば $\beta(g) > 0$ でコンダクタンスはサイズを大きくすると増え，$g < g_{\mathrm{c}}$ だと $\beta(g) < 0$ でコンダクタンスは減り続け 0 になる．このように g_{c} の値は，コンダクタンスが増え続け電気伝導度が有限になるか，それとも減り続け伝導を示さなくなるかを分ける重要な物理量であることがわかる．

次に 2 次元を考えよう．このとき，$\lim_{g\to\infty}\beta(g) = 0$ なので，もし $\beta(g)$ が単調なら

$$\beta(g) < 0 \tag{2.15}$$

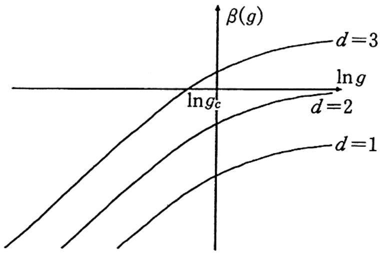


図 2.2　ベータ関数の振る舞い

となる．よってコンダクタンスは絶えず減少し，2 次元系はすべて絶縁体という驚くべき結論が得られる．しかし，これはあくまで

1. 式 (2.5) が成立している
2. $\beta(g)$ が単調

を仮定しての話である．これについては 4 章で再びふれる．

このベータ関数と ν の関係を式 (2.9) から調べてみよう．$\beta(g) \approx 0$ 付近でテイラー展開を行い

$$\beta(g) = \frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}L} \approx \beta'(g_{\mathrm{c}})(g - g_{\mathrm{c}})$$

から

$$\int_{g(L_0)}^{g} \frac{\mathrm{d}g}{\beta'(g_{\mathrm{c}})g(g - g_{\mathrm{c}})} = \log(L/L_0) \tag{2.16}$$

を得る．これを積分すると

$$\frac{g(L) - g_{\mathrm{c}}}{g(L)} = \frac{g(L_0) - g_{\mathrm{c}}}{g(L_0)}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{g_{\mathrm{c}}\beta'(g_{\mathrm{c}})}$$

となり，結局

$$g(L) \approx g_{\mathrm{c}} + (g(L_0) - g_{\mathrm{c}})\left(\frac{L}{L_0}\right)^{g_{\mathrm{c}}\beta'(g_{\mathrm{c}})} \tag{2.17}$$

が得られる．$g(L_0)$ は最初に与えた，ミクロな長さ L_0 でのコンダクタンスであり，系のパラメータ x を変えると連続的に変化する．g_{c} の付近では

$$g(L_0) = g_{\mathrm{c}} + a(x - x_{\mathrm{c}}) + \cdots$$

と展開できることに注意し，式 (2.7) と (2.17) を比較して

$$\nu = \frac{1}{g_c \beta'(g_c)} \tag{2.18}$$

が導かれる．

実験では伝導度を測定して，式 (2.1) で定義された臨界指数 s が求められる．一方，理論，特に数値計算で評価しやすいのは ν である．そこでこれらの関係を考えてみる．後の応用も考えて，式 (2.5) を以下のように拡張する．コンダクタンスは無次元物理量で，単位系を変えても不変なはずである．一方，形のサイズ，局在長，相関長は単位に依存する．そこで単位長さ（例えば cm，mm，m など）を b とすると，単位系によらず

$$g = g(L/b, \xi/b) \tag{2.19}$$

となっているはずである．b は任意なので，$b = \xi$ とおいて

$$g = g(L/\xi, 1) = f(L/\xi)$$

となり，式 (2.5) が再現される．同様に伝導度の形を

$$\sigma \sim b^{2-d} g(L/b, \xi/b) \tag{2.20}$$

とすると，$b = \xi$ とおいて

$$\sigma \sim \xi^{2-d} f(L/\xi) = L^{2-d} F(L/\xi)$$

となる．金属側では伝導度はサイズに依存しないので，$F(x)$ の漸近形は $F(x) \sim x^{d-2}$ である．よって

$$\sigma \sim L^{2-d} (L/\xi_{\mathrm{ext}})^{d-2} \sim (x - x_c)^{(d-2)\nu} \tag{2.21}$$

が得られる．こうして，伝導度と相関長の臨界指数について

$$s = \epsilon\nu \tag{2.22}$$

が成立していることになる．これがヴェグナー(Wegner)の関係式である[9]．

2.2　弱局在理論と非線形シグマモデル

このように臨界指数 ν, s を計算するにはベータ関数 $\beta(g)$ が求まればいい．そのためにはコンダクタンスのサイズ依存性を計算すればよい．次元 $d(\equiv 2 + \epsilon)$

のときのベータ関数を，金属的でコンダクタンスが十分大きく，$\epsilon \ll 1$ の場合に摂動計算することが考えられた．これは局在の効果があまり強くなく，系が十分金属的な伝導を示すことが仮定されているので，弱局在理論と呼ばれている[6,7,10–12]．

ランダムポテンシャルを $V(\boldsymbol{r})$ として，式 (1.12) のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})$$

を考える．このモデルでコンダクタンスを計算すると，2 次元で

$$g(L) = g_0 - \frac{2}{\pi}\log(L/l) \tag{2.23}$$

となる[6,7,10–12]．l は平均自由行程程度の量である．これを代入してベータ関数を弱局在領域で計算すると，2 次元で

$$\beta(g) = -\frac{2}{\pi g}$$

を得る．同様に，$d = 2 + \epsilon$ 次元では

$$\beta(g) = \epsilon - \frac{2c_d}{\pi g} \tag{2.24}$$

となる．c_d は d 次元単位球の表面積を S_d として

$$c_d = \frac{S_d}{(2\pi)^{d-1}}$$

である．このベータ関数の表式を式 (2.18) に代入して

$$g_{\mathrm{c}} = \frac{2c_d}{\pi\epsilon} \tag{2.25}$$

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} \tag{2.26}$$

を得る．式 (2.23) は $1/g$ に関する展開になっているので，転移点まで使うには式 (2.25) より $\epsilon \ll 1$ でなければならないことに注意しよう．実際，フラクタルな格子を考えて臨界指数を計算してみると，2 次元に近いところで式 (2.26) がなかなかいい近似になっていることがわかる[13]．

実験との兼ね合いで重要なのはもちろん $\epsilon = 1(d = 3)$ の場合である．式 (2.26)

を強引に 3 次元に外挿すると

$$s = \nu = 1$$

となるが，もともとコンダクタンスが大きいと仮定して摂動展開を行っているので，$g_c \approx 1$ 付近の $\beta(g)$ の情報が必要となる転移点ではこの結果は信用できない．

これを改良するため，もとの式 (1.12) のエッセンスだけを取り出して効率よく摂動計算が行えるように，有効自由エネルギー

$$F = \frac{\pi \rho_{\mathrm{F}}}{8} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r} \left[D \mathrm{Tr}(\nabla Q)^2 + 2\mathrm{i}\omega \mathrm{Tr}(EQ) \right] \tag{2.27}$$

を考え，これをもとに伝導度の高次の補正を計算する方法が考案された[14–16]．ρ_{F} はフェルミ面での状態密度，D は拡散係数で ω は交流伝導度の周波数である．Q は行列で，これに $Q^2 = 1$ という条件がついていることから行列要素が独立でなくなり，非線形項が現れることから，これは非線形シグマモデルと呼ばれている．E は単位行列を I として

$$E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

と定義される．このモデルには大別して二通りある．ひとつは行列を一般に $2N$ 次元として計算して，計算の最後に $N \to 0$ という極限をとるもので，もうひとつは Q をグラスマン数と普通の数が混ざった超行列だと見なして計算するものである[16]．

多少モデルを変更しても，結局この有効自由エネルギーの表式が得られる．このことからアンダーソン転移はユニバーサルな現象であり，モデルの詳細にはよらないことが予想できる．では，何がモデルを根本的に変えるかというと，それは系の対称性である．ランダム系なので空間に関する対称性は存在しない．よってスピンと時間に関する対称性のみが重要になる．これらの対称性は

Orthogonal　時間反転対称性もスピン回転対称性も存在している
Symplectic　時間反転対称性はあるが，スピン回転対称性はない
Unitary　時間反転対称性がない

というように分類され，Q の満たす条件はこの対称性によって決まる．このorthogonal, unitary, symplectic という呼び名はランダム行列理論[17]との対応からきている．

非線形シグマモデルによる臨界指数の高次の摂動展開は，orthogonal で[18,19]

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} - \frac{9}{4}\zeta(3)\epsilon^2 + \frac{27}{16}\zeta(4)\epsilon^3 + \cdots \qquad (2.28)$$

unitary で[20]

$$\nu = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{3}{4} + \cdots \qquad (2.29)$$

となる．$\zeta(x)$ はリーマンのゼータ関数である．単純に $\epsilon = 1$ を代入すると臨界指数が負になったり，次数を増やすと結果ががらりと変わることがわかる．注意深くパデ近似を行えば事情はいくらか改善するが，それでも次節で述べる不等式を破ってしまう場合がある．この原因として，もとのハミルトニアンを非線形シグマモデルに還元したことと，本来 $\epsilon \ll 1$ で正当化される摂動計算の結果を，$\epsilon = 1$ まで使ったことの2つの可能性が考えられる．最近，摂動計算をしなければ，リーゾナブルな結果が得られることが，単純化された非線形シグマモデルの数値計算によってわかった[21]．このことから，非線形シグマモデルへ問題をマップするのは正しそうであるが，$\epsilon = d - 2$ に関する展開を $d = 3$ まで使ってしまうのは正しい結果を与えないことが示唆される．

2.3　臨界指数に関する不等式

ここで臨界指数 ν に関する不等式を導いておく．オリジナルな一般的議論はチャイーズ(Chayes)らによるものだが[22]，ここではクラマー(Kramer)によるアンダーソン転移を念頭においた議論を紹介する[23]．一般に不等式は下限，もしくは上限を与えるだけなので臨界指数の情報はあまり与えないと思われがちだが，ことアンダーソン転移に関してはこれが非常に重要となる．

まずアンダーソン転移を特徴づける物理量を Λ としよう．これをサイズ L と，N 個のランダムポテンシャルの値の関数とし

$$\Lambda = \Lambda(L, W_1, W_2, \cdots, W_N) \qquad (2.30)$$

とおく．これを確率分布関数 $P(W_1, \cdots, W_N)$ を使ってランダムポテンシャル

について平均した

$$\langle \Lambda \rangle = \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, \Lambda(L, W_1, \cdots, W_N) P(W_1, \cdots, W_N) \tag{2.31}$$

は，有限サイズで式 (2.5) のようになっていると仮定する．例えばそれぞれのポテンシャルの揺らぎを W とおくと，$\langle \Lambda \rangle$ は式 (2.7) のように

$$\langle \Lambda \rangle = \Lambda(L/\xi) = \Lambda_{\mathrm{c}} + a_1 L^{1/\nu}(W - W_{\mathrm{c}}) + \cdots \tag{2.32}$$

となる．

臨界指数を評価するには式 (2.32) を W で微分し，$W = W_{\mathrm{c}}$ とおけばよい．式 (2.31)，(2.32) から

$$a_1 L^{1/\nu} = \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, \Lambda(L, W_1, \cdots, W_N) \left. \frac{\mathrm{d}P(W_1, \cdots, W_N)}{\mathrm{d}W} \right|_{W_{\mathrm{c}}} \tag{2.33}$$

となる．右辺を評価するためコーシー-シュワルツの不等式

$$\begin{aligned} \left(\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, \Lambda \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}W} \right)^2 &= \left[\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, (\Lambda \sqrt{P}) \left(\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}W} \right) \right]^2 \\ &\leq \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, \Lambda^2 P \quad \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, \frac{1}{P} \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}W} \right)^2 \end{aligned}$$

を考える．最初の項は転移点では ${\Lambda_{\mathrm{c}}}^2$ 程度であろう．次の項を評価するため，具体的に確率分布関数の形を考えてみよう．例えば，ガウス分布の場合

$$P(W_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} W} \exp\left(-\frac{W_i^2}{2W^2} \right) \tag{2.34}$$

となる．そこで一般にポテンシャルが独立に分布している場合，P は

$$P(W_1, \cdots, W_N) = W^{-N} \prod_{i=1}^{N} f(W_i/W)$$

という形になっていると仮定する．$x_i = W_i/W$ と定義し，$\int \mathrm{d}x f(x) = 1$ を使うと

$$
\begin{aligned}
&\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}W_i \, \frac{1}{P}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}W}\right)^2 \\
&\qquad = \frac{1}{W^2}\int \mathrm{d}x_1 \cdots x_N f(x_1)\cdots f(x_N) \prod_{i=1}^{N}\left(N + \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\log f(x_i)\right)^2 \\
&\qquad = \frac{1}{W^2}\int \mathrm{d}x_1 \cdots x_N f(x_1)\cdots f(x_N) \\
&\qquad\qquad \left(N^2 + 2N\sum_i \frac{x_i}{f(x_i)}\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} + \sum_{i,j}\frac{x_i x_j}{f(x_i)f(x_j)}\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{W^2}\left[N^2 - 2N^2 + N(N-1) + N\int \mathrm{d}x \frac{x^2 f'^2}{f}\right] \\
&\qquad = \frac{N}{W^2}\left[\int \frac{x^2 f'^2}{f}\mathrm{d}x - 1\right]
\end{aligned}
$$

となる．これは結局 N のオーダーである．こうして C を 1 程度の量として

$$
L^{2/\nu} \le C\frac{{\Lambda_{\mathrm{c}}}^2 N}{W_{\mathrm{c}}^2} \tag{2.35}
$$

となる．さて，系に含まれるランダムネス(今の場合，ランダムポテンシャルの数)は系の体積に比例して増えるはずである．これより $N \sim L^d$ となり

$$
\nu \ge 2/d \tag{2.36}
$$

となる[22–24]．

非線形シグマモデルを摂動展開で扱って臨界指数を計算すると，この不等式を破ってしまうことから，摂動展開の問題点が明らかになった．またいくつかの 3 次元系での実験で $s \approx 0.5$ が得られているので，ウェグナーの関係式，$s = (d-2)\nu$ と実験結果が相容れないことが示唆された．このように不等式 (2.36) は，時には等式以上に役に立つ重宝なものとなっている．

3章　3次元電子系でのアンダーソン転移

3.1　数値スケーリング

2章でみたように解析的なアプローチはアンダーソン転移について多くの知見を与えてくれるものの，臨界指数の定量的な評価には適さないので，数値的にアンダーソン転移を調べようとするのはごく自然なこととなる．特にアンダーソン転移の場合，多体効果を考えなくてよいので比較的大きな系が扱え，数値計算で精密な議論ができる．

そこで，タイトバインディングハミルトニアン

$$H = \sum_{i,j} V_{ij}|i\rangle\langle j| + \sum_i W_i|i\rangle\langle i| \tag{3.1}$$

を考える．i, j はサイトの番号であり，第1項は電子のサイト間のトランスファーを表し，第2項はポテンシャルエネルギーを表す．V_{ij} が V という一定値をとり，i, j 間のホッピングは最隣接格子間のみ考えるとし，W_i を箱型の確率分布

$$P(W_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{W} & (|W_i| < \frac{W}{2}) \\ 0 & (|W_i| \geq \frac{W}{2}) \end{cases} \tag{3.2}$$

に従っているとしたものをアンダーソン・モデルという[5)]．こんな単純化されたモデルで，実際の系が議論できるか心配になってしまう人もいるかもしれない．しかし相転移付近では余計な自由度は顔を出さず，臨界指数はモデルの詳細にはよらないという普遍性(ユニバーサリティ)がみられるので，このような単純化されたハミルトニアンでも現実の臨界指数が議論できるのである．

この単純化されたモデルで，アンダーソン転移を特徴づける，数値的に精度よく計算できる量を見つけなければいけない．例えば，以下のような断面が $L \times L$

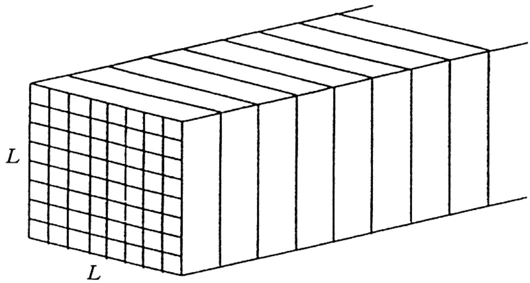


図 3.1　擬 1 次元のバー

で長さが M のバーを考えてみよう．十分 M が長ければこれは 1 次元系だと見なせ，状態は必ず局在していると考えられる．よって，バーの端では電子状態は

$$\psi \sim \exp(-M/\xi_L) \tag{3.3}$$

のようなすそをもつはずである．

ξ_L を計算するには，通常グリーン関数の反復計算や転送行列法が用いられる．はじめにグリーン関数の反復法を説明しよう．ハミルトニアン $H^{(j)}$ を 1 番目から j 番目までの断面に作用するものだと定義する．端から j 番目の断面の状態を $|j\rangle$ とおくと，波動関数が指数関数的に崩壊しているとき，グリーン関数

$$G(j) = \left\langle 1 \left| \frac{1}{E - H^{(j)}} \right| j \right\rangle \tag{3.4}$$

も式 (3.3) のように崩壊する．よって，このグリーン関数が効率よく計算できれば ξ_L が求められる．$H^{j,j\pm1}$ を j 番目と $j \pm 1$ 番目の断面上のサイトの間のハミルトニアン行列，H^j を j 番目の断面上の L^{d-1} 個のサイトに対するハミルトニアンとすると

$$H^{(j)} = H^{(j-1)} + H^{j,j-1} + H^{j-1,j} + H^j \tag{3.5}$$

となる．補助的なグリーン関数

$$g(j) = \left\langle j \left| \frac{1}{E - H^{(j)}} \right| j \right\rangle \tag{3.6}$$

を定義すると

$$G(j) = G(j-1)H^{j-1,j}g(j) \tag{3.7}$$

$$g(j) = \frac{1}{\epsilon - H^j - H^{j,j-1} g(j-1) H^{j-1,j}} \tag{3.8}$$

が得られる[25,26]．こうして，$L^{d-1} \times L^{d-1}$ 行列で表される $G(j), g(j)$ が，反復計算で $j = M \gg L$ まで効率よく計算でき

$$\frac{1}{\xi_L} = -\frac{1}{M} \log |G(M)| \tag{3.9}$$

より崩壊長 ξ_L が求められるのである．

次に転送行列法を説明する．簡単に1次元系（$L = 1$）を考え，トランスファーは一定値 V で最隣接サイト間にだけ存在するとする．n 番目のサイトの波動関数 ψ_n は，式 (3.1) から

$$\psi_{n+1} = V^{-1}(E - W_n)\psi_n - \psi_{n-1} \tag{3.10}$$

を満たす．つまり

$$T_n = \begin{pmatrix} V^{-1}(E - W_n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

として

$$\begin{pmatrix} \psi_{j+1} \\ \psi_j \end{pmatrix} = [\prod_{n=1}^{j} T_n] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

となる．有限の断面積（$L \geq 2$）の場合は

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^{-1}(E\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_n) & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

という $2L^{d-1} \times 2L^{d-1}$ という行列を考えればよい．$\boldsymbol{H}_n$ は n 番目の断面に対するハミルトニアンである．

$$\boldsymbol{Q}_M = \prod_{n=1}^{M} \boldsymbol{T}_n \tag{3.14}$$

はランダムな行列要素をもった行列の積である．

$$\Gamma = \lim_{M \to \infty} (\boldsymbol{Q}_M \boldsymbol{Q}_M^{\dagger})^{1/2M} \tag{3.15}$$

を定義すると，ランダムな行列要素をもつ行列の積に関するオセレデック

(Oseledec) の定理[27]から，Γ は必ず有限の正の固有値をもつ．これを $\exp(\gamma_i)$ と書くと，γ_i は層一枚分進むごとに平均してどれだけ波動関数が減衰するかを示しており，このなかで一番ゆっくりと減衰するものが局在長を表す．すなわち

$$\frac{1}{\xi_L} = \min|\gamma_i| \tag{3.16}$$

である．

ハミルトニアンの直接対角化に比べると，ここで述べたグリーン関数法，転送行列法は

1. 対角化は一般に $(L^{d-1} \times M)^2$ のメモリーを要し，ランチョス法などを使っても $L^{d-1} \times M$ 程度のメモリーが必要となるが，グリーン関数法だと $L^{2(d-1)}$，転送行列法だと $4 \times L^{2(d-1)}$ ですむ
2. 式 (3.13) からわかるように，転送行列はほとんど行列要素が 0 で，残りの行列要素も多くは 1 なので計算量が少ない
3. 十分長く M をとれば，ξ_L は中心極限定理に従って収束し，欲しい精度で効率よく数値計算できる

などのメリットがある．グリーン関数法は逆行列を求めるという操作が必要なので，単純なタイトバインディングモデルで局在長を求める場合は，転送行列法がより優れている．一方，グリーン関数法は状態密度の計算，透過率の計算などにも適用できるという長所がある．

一般に断面を広げれば，電子の波動関数は不規則性が強いところをうまくさけて通り抜けることができるので，この崩壊長 ξ_L は伸びるはずである．問題は増大の仕方である．この量が断面のサイズ M よりも速く増大できれば，$L \times L \times L$ の立方体を考えたとき状態は広がっているであろう．逆にもし局在状態であったら，L が局在長 ξ を超えるともはや ξ_L は増加しなくなる．なぜなら断面よりも小さい領域に波動関数が局在しているので，たとえ断面を大きくしても，局在状態はその効果を感じとれないからである．こうして

$$\Lambda_L = \frac{\xi_L}{L} \tag{3.17}$$

という量を考えると，これはサイズ L の関数として

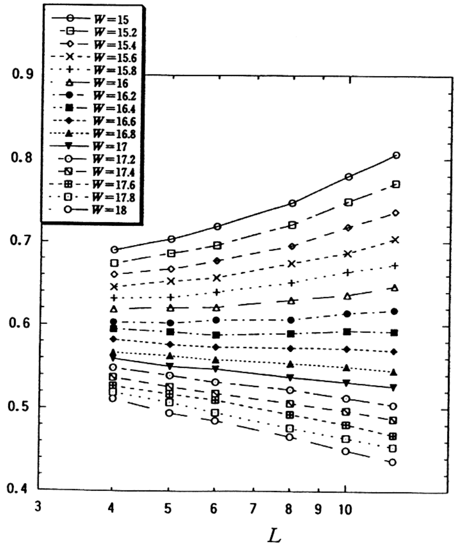


図 3.2　アンダーソン・モデルでの L と Λ_L の関係．ランダムポテンシャルの強さ W を増大させると $W \approx 16.5V$ で Λ が増加関数から減少関数へと転じる

$$\Lambda_L = \begin{cases} \text{増加関数} & \text{(非局在状態)} \\ \text{一定} & \text{(転移点)} \\ \text{減少関数} & \text{(局在状態)} \end{cases} \tag{3.18}$$

という結果が予想できる．

具体的にアンダーソン・モデルで Λ_L を計算したときの結果を図 3.2 に示す．W を大きくしていったとき，$W = 16.4V$ から $W = 16.6V$ の間で Λ_L が増加関数から減少関数に転じていることがわかるであろう．箱型分布で得られたこの $W_{\rm c} \approx 16.5V$ とは，ポテンシャルの揺らぎが

$$\delta W = \sqrt{\langle (W_i - \langle W_i \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{W^2}{12}} \approx 5V \tag{3.19}$$

であることを意味している．おおざっぱにいうと，電子の弾性散乱時間 τ は $\hbar/\tau = 2\pi \langle W_i \rangle^2 \rho_{\rm F}$ で与えられ，今考えているのは 3 次元の立方格子なので，バンド幅は不純物がない場合，$12V$ となるから $\rho_{\rm F}$ はその逆数程度と見積もられる．これから $\hbar/\tau \approx V$ と評価できる．フェルミ・エネルギーのオーダーも V

程度なので，結局

$$E_F \tau \approx \hbar \tag{3.20}$$

で転移が起きていることがわかる．これは長さで見ると，l を弾性散乱長として $E_F = mv_F^2/2, \tau = l/v_F$ を使って

$$k_F l \approx 1 \tag{3.21}$$

となる．つまり，不規則ポテンシャルを強くしていき散乱が頻繁に起こり，ついに散乱長がフェルミ波長と同程度になった場合に，アンダーソン転移が起こるというわけである．この関係式はヨッフェ-レゲル(Ioffe-Regel)の条件として知られている[28)]．

もちろん転移点はモデルに依存する量なので，その具体的な値を議論して実験と対応づけるのは意味がない．実験との対応で意味のあるのは臨界指数である．これを求めるためには以下の手続きがふまれる．Λ_L は，本来は状態の固有エネルギー E，不規則性の強さ(例えばアンダーソン・モデルでは W)と L の関数として決まる量であるが，これが

$$\Lambda_L = f(L/\xi) \tag{3.22}$$

という形で書けると仮定する．これは 1 次元的なバーで計算された量なので，エネルギーや不規則性の度合いなどのパラメータに関しては解析的な関数であろうから，式 (2.32) のように

$$\Lambda_L(x) = \Lambda_c + a_1(x - x_c)L^{1/\nu} + a_2[(x - x_c)L^{1/\nu}]^2 + \cdots \tag{3.23}$$

と展開する．この関数形でデータをフィットして臨界指数を決定すればよいのである．実際，図 3.2 のデータを式 (3.23) でフィットして，アンダーソン・モデルの転移点は $W_c \approx 16.5V$, 臨界指数は $\nu \approx 1.6$ を得る．

3.2　数値計算で確かめたユニバーサリティ

次に数値計算の最近の結果を概観しよう．数値計算で確かめるべきなのは，まず 1 変数スケーリング (2.5)，(3.22) が成立しているかである．これが確かめられたら，次にユニバーサリティ，つまりモデルを変えても同じ臨界指数が得られるかどうかを確認する．

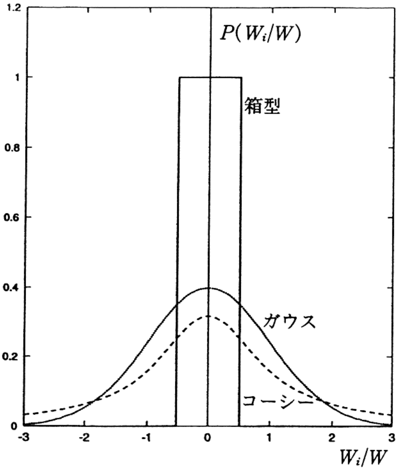


図 3.3 箱型(式 (3.2))，ガウス型(式 (2.34))，コーシー型(式 (3.24))の確率分布．コーシー型の場合，サイトポテンシャルの 2 次のモーメント(揺らぎ)が発散する

例えば式 (3.1) で与えられるアンダーソン・モデルで，サイトポテンシャルの分布関数を変える．もしポテンシャルの分布関数 $P(W_i)$ の形によって，臨界指数が異なってしまったら，普遍性は成り立たないことになる．ポテンシャルに関する普遍性を確かめるためには箱型分布 (3.2)，ガウス分布 (2.34) のほかに，コーシー分布

$$P(W_i) = \frac{W}{\pi\left(W^2 + W_i^2\right)} \tag{3.24}$$

を考えてみるのが面白い．この分布を仮定すると 1 次元系では局在長の厳密解が簡単に求められる[29)]．ところで，このコーシー分布はポテンシャルの揺らぎが発散する，すなわち

$$\langle W_i^2 \rangle \to \infty \tag{3.25}$$

という性質をもっている．ボルン近似での散乱時間はポテンシャルの揺らぎに反比例しているので (式 (1.15) 参照)，これは弾性散乱長が無限小ということを意味し，ヨッフェ－レゲルの条件 (3.21) を信じると系は常に絶縁体になっていることになる．実際，コーシー分布をサイトポテンシャルがとる場合は，3 次元系でアンダーソン転移があるかどうかは自明でなく[30–32)]，まして，臨界指数が普遍的な値をとるかどうかを確認するのは困難であった．

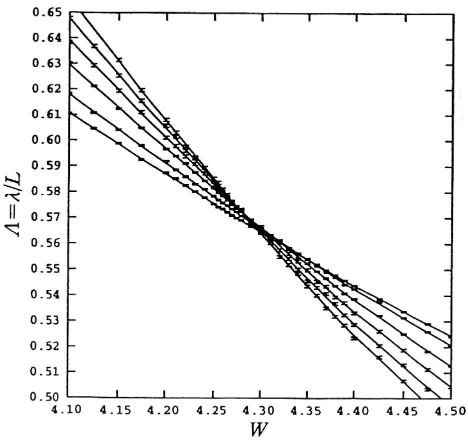


図 3.4　ポテンシャルがコーシー分布 (3.24) に従っている場合の WvsΛ_L ［文献 33) より］

アンダーソン転移がある場合，Λ を不規則性の強さ W の関数としてみると，これは減少関数となる．その減少の仕方は式 (3.23) から，サイズが大きいほど激しいはずである．また，もし転移があれば，式 (3.23) から転移点 $W = W_c$ で，すべてのサイズのデータが交わることがわかる．図 3.4 は実際にポテンシャルがコーシー分布をとっている場合の Λ の W 依存性である．W が十分小さいところでは Λ_L が L に関する増加関数となっており，逆に W が大きいと Λ_L が L に関して減少関数となっていることから，転移が確かに存在するということがわかる．

ところで図をよくみると，一点で曲線群が交差しておらず，微妙にサイズを大きくしていくとずれていくように見える．これはスケーリングの補正によるものである．式 (2.5) の形の 1 変数スケーリングはある程度大きな系で成立しており，系が小さいと局在長以外の余計な長さのスケールが顔を出すためにこのような振る舞いが見える．これを定量的に扱うためには式 (3.22) を拡張しなければならない．無次元量 Λ は長さの単位を b として式 (2.19) のように

$$\Lambda = f(L/b, \xi/b) \tag{3.26}$$

となっているはずである．仮にこれがもうひとつ別の長さのスケール，ξ_{irr} を

もっているとするとこれは

$$\Lambda = f(L/b, \xi/b, \xi_{\rm irr}/b) \tag{3.27}$$

となる．$b=\xi$ とおくと，これは

$$\Lambda = f(L/\xi, 1, \xi_{\rm irr}/\xi) = h(L/\xi, L/\xi_{\rm irr}) \tag{3.28}$$

となる．有限サイズではこれはパラメータ x の解析的な関数で，1 変数スケーリングの場合，$\xi \sim (x-x_{\rm c})^{-\nu}$ から $\Lambda = f(L/\xi) = h[L^{1/\nu}(x-x_{\rm c})]$ と書けた．これにならい，$\omega(x)$ を x の解析的な関数とし，新しい長さのスケールが $\xi_{\rm irr} \sim 1/\omega(x)^{1/y_{\rm irr}}$ となっているとすると，式 (3.28) は

$$\Lambda = h(L^{1/\nu}(x-x_{\rm c}), L^{y_{\rm irr}}\omega(x)) \tag{3.29}$$

となる．$y_{\rm irr}$ が負なら L が大きいと，この第 2 の変数は無視でき 1 変数スケーリングが成立する．式 (3.29) を展開すると

$$\Lambda = h_0[L^{1/\nu}(x-x_{\rm c})] + h_1[L^{1/\nu}(x-x_{\rm c})]L^{y_{\rm irr}}\omega + h_2[L^{1/\nu}(x-x_{\rm c})](L^{y_{\rm irr}}\omega)^2 + \cdots \tag{3.30}$$

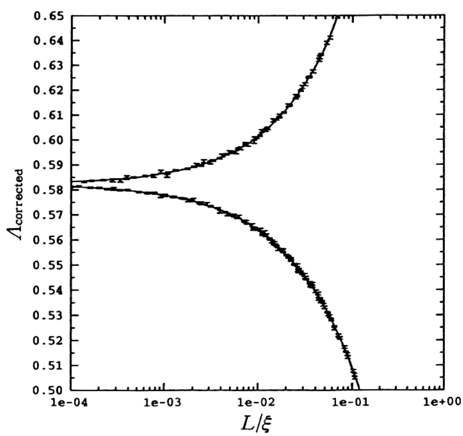


図 3.5　スケーリングに対する補正を取り除いた後の Λ の振る舞い［文献 33) より］

表 3.1　時間反転対称性，スピン回転対称性がともに存在する場合(orthogonal)の臨界指数 ν，臨界点 W_c，$\Lambda_c = h_0(0)$．ν, Λ_c が分布関数によらず同じ値をとっていることがわかる．( ) の中の数字は 95% 信頼区間を表している［文献 33) より］

	W_c/V	Λ_c	ν
箱型	16.54(52,56)	0.576(73,78)	1.57(55,60)
ガウス	21.29(27,32)	0.576(73,78)	1.58(55,61)
コーシー	4.27(25,28)	0.579(76,88)	1.58(46,65)

となる．右辺第 2 項以降がスケーリングに対する補正である．たとえ余計な長さのスケールが 2 個以上あるときでも，$y_{\rm irr} < 0$ である限り，1 変数スケーリングが回復する．

実際，データをフィットしてみると $y_{\rm irr} = -2\sim-3$ となり，確かに十分大きな系で 1 変数スケーリングが回復することがわかる．$h_0[L^{1/\nu}(x - x_c)] = f(L/\xi)$ をプロットしたのが図 3.5 である．

こうして求めた臨界指数は orthogonal の場合，表 3.1 のようになる．

A．磁場中のアンダーソン転移

このようにして，orthogonal の場合，ユニバーサリティが確認された．では，磁場がかかり時間反転対称性の破れたユニタリの場合はどうであろうか．一番単純に磁場の効果をアンダーソン・モデルにとりいれるのには，式 (3.1) のホッピングの項

$$\sum_{i,j} V_{ij} |i\rangle\langle j|$$

にパイエルス位相を入れればよい．すなわちサイト j からサイト i に行く場合，波動関数にはベクトルポテンシャル $A(\boldsymbol{r})$ によるアハラノフ-ボーム（Aharonov-Bohm）位相因子

$$\exp\left(-{\rm i}\frac{e}{\hbar}\int_{\boldsymbol{r}_j}^{\boldsymbol{r}_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot {\rm d}\boldsymbol{r}\right)$$

がつくとして

$$V_{ij} = V{\rm e}^{{\rm i}\theta_{ij}} \tag{3.31}$$

とすればよい．例えば，単純立方格子において z 方向に磁場 B がかかっている場合を考えよう．$x-y$ 面内の正方格子を貫く磁束 Ba^2（a は格子定数）を磁束

量子 h/e を単位としてはかった値 $\phi = eBa^2/h$ を定義すると，$x-y$ 面内のホッピングはランダウ・ゲージ $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$ を採用した場合

$$\theta_{(i_x,i_y),(i_x\pm1,i_y)} = 0 \tag{3.32}$$

$$\theta_{(i_x,i_y),(i_x,i_y\pm1)} = \pm2\pi\mathrm{i}\phi i_x \tag{3.33}$$

となる．

2 章で述べたように臨界指数を摂動計算するのは困難である．そこで数値計算から臨界指数を評価すると，ν の値は磁場がかかっても大きくは変化せず[34)]，磁場のないとき，$\nu = 1.57\pm0.01$ であったものが，磁場をかけると $\nu = 1.43\pm0.02$ になることが最近わかった[33, 35)]．また磁場をかけるとポテンシャルの揺らぎ W をより大きくしなければならないことがわかった．これはアンダーソン局在のもととなる干渉効果が磁場で弱まるので，より強いポテンシャル揺らぎを与えないと系が絶縁体にならないことを意味している．

図 3.5 のようなプロットを磁場のかかった系（Ua，Ub）と磁場のかかっていない系（Oa，Ob）に対して行ったものを図 3.6 を示す．Ua，Ub と記したのは

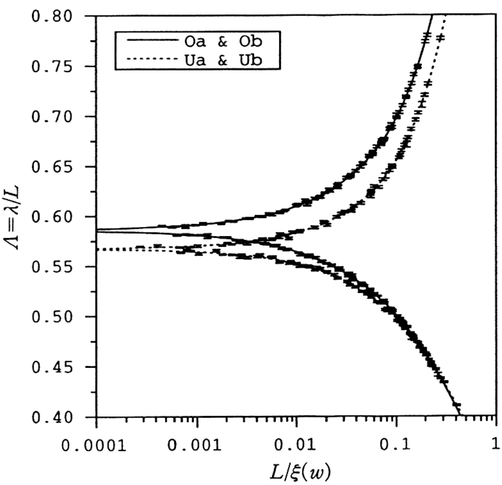


図 3.6　磁場のかかった系とかかっていない系でのスケーリングプロット．実線は磁場のかかっていない場合で，点線は磁場のかかっている場合．磁場のかかっている場合は，異なる大きさの磁場（$\phi = 1/3,\ 1/4$）に対して行っている．磁場が有限である限り，その大きさによらず同じ曲線に乗ってしまうのが，ユニバーサリティである［文献 35) より］

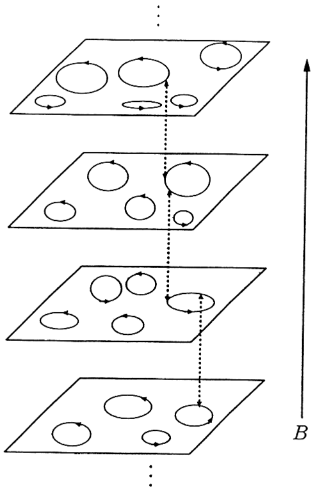


図 3.7　強磁場中の層状系．磁場は層に垂直にかかっているので層内では電子は不純物に散乱されながら，サイクロトロン運動をする．電子は層間を移動する．これはタイトバインディングモデルとは全く異なるが，臨界指数は同じ程度と見積もられている[38,39]

$\phi = 1/3$，$1/4$ の場合を意味しており，Oa，Ob の場合はエネルギーが異なっている場合を考えている．このようにエネルギーや磁場の大きさにはよらず，ただ磁場があるかないかだけでスケーリング曲線が決まってくるのが，ユニバーサリティである．

一口に時間反転対称性が破れているといっても，いろいろな状況が考えられる．例えば，ホッピングの位相因子がランダムな場合も時間反転対称性は存在しない．これのモデルについても解析が行われており[36]，臨界指数は $\nu = 1.45 \pm 0.05$ と評価されており，一様磁場の場合と一致している．

磁場が絡んでくる問題として大変興味深いのは量子ホール系である．もし量子ホール効果[12,37]を起こしている 2 次元面を，図 3.7 のように層状に重ねて層間のホッピングを許すと，これは 3 次元系とみなせる．この場合でも臨界指数は $\nu \approx 1.45$ と見積もられている[38,39]．

表 3.2 に時間反転対称性の破れている系に対する臨界指数をまとめておく．

表 3.2　時間反転対称性の破れた 3 次元系におけるアンダーソン転移の臨界指数．エラーバーは標準偏差である．Ua，Ub と記したのは $\phi = 1/3, 1/4$ の一様磁場がかかったアンダーソン・モデルの結果で[35]，RP はホッピングの位相がランダムなモデルである[36]．Layer は層状系の場合である[39]

	W_c/V	Λ_c	ν
Ua	18.32±0.01	0.568 ± 0.001	1.43 ± 0.02
Ub	18.38±0.01	0.566 ± 0.001	1.43 ± 0.03
RP	18.80±0.02	0.566 ± 0.001	1.45 ± 0.05
Layer			1.45 ± 0.25

B．準位統計

今のところ，格子構造が立方格子のように単純で規則的なら転送行列法が一番精度がよい方法である．一方，アモルファスのように格子点のつながり方が不規則な場合は，転送行列法はあまり強力な方法ではない．というのは，転送行列法は次々と面を重ねていく操作が基本であるが，面と面のつながり方がでたらめでは計算時間がかかるし，たまたま面と面がつながっていないような場合をどう扱っていいか，あいまいとなる．そこで 1 変数スケーリング (3.22) に従うような別の量を解析する必要が出てくる．

一番簡単なのは固有値の分布を考えることである．不規則な行列要素をもつハミルトニアンの固有値は，以前から原子核，微粒子，カオス系などを議論するとき，盛んに取り上げられてきた[17,40–42]．この本質は，ランダムネスがない場合には縮退していた準位が，ランダム系になると縮退が解け，あたかも準位どうしが反発しているように見えることにある．こうして最隣接準位の間隔 ΔE の分布 $P(\Delta E)$ が

$$\lim_{\Delta E \to 0} P(\Delta E) = 0 \tag{3.34}$$

となる．系やエネルギー領域によって状態密度が異なるので，状態密度 $\rho(E)$ が大きいところでは ΔE は小さいのが当たり前だし，逆に $\rho(E)$ が小さいところでは ΔE は当然大きくなる．これは準位の反発とは関係のない効果なので，ΔE をその平均値 $\langle \Delta E \rangle = 1/\rho(E)$ で規格化した

$$s = \frac{\Delta E}{\langle \Delta E \rangle} \tag{3.35}$$

の統計を考える．s の分布関数はウィグナー分布

$$P_{\mathrm{Wigner}} = A_\beta s^\beta \exp(-B_\beta^2 s^2) \tag{3.36}$$

で非常によく近似できることが知られている[17,42)*]．ここで，β は§2.2 で述べた時間反転とスピン回転に対する対称性に依存するパラメータで，2 つの対称性とも満たされている場合 (orthogonal)$\beta = 1$，スピン回転対称性のみ破れている場合は (symplectic)$\beta = 4$ で，時間反転対称性が破れている場合は (unitary)$\beta = 2$ である．β が大きいほど $s \approx 0$ で $P(s)$ は小さくなり，準位間の反発が強くなる．簡単にいうと orthogonal の場合，ハミルトニアンが実なので適当に実数を調整すれば $s = 0$ とできるが，ユニタリの場合，ハミルトニアンがエルミート行列となるので，実部と虚部を同時に調整しなければ最隣接間隔を 0 にできない，つまりより実現確率が低いということである．

この結果をアンダーソン転移に利用しよう．金属的な状態では波動関数は十分広がっている．そのため，準位間の反発は十分強くなり固有値の間隔 s の確率分布 $P(s)$ はウィグナー分布に近いと思われる．一方，局在領域では状態は波動関数の重なりがないので，固有値の間には相関がない．よってこの場合，ポアソン (Poisson) 分布

$$P_{\mathrm{Poisson}}(s) = \mathrm{e}^{-s} \tag{3.37}$$

となる．有限系では局在状態どうしでもすこしは重なりがでてくるであろう．また金属相領域でも波動関数は真に広がりきっていない．よって有限系ではポアソン分布とウィグナー分布の中間的振る舞いが見られ，L を大きくしていくにつれてどちらかの極限に近づくのである．分布関数自体を見てもいいが，スケーリング解析を行うため分布関数を特徴づける量を考えた方が都合がよい．例えば，$P(s)$ を適当な範囲まで積分した

$$\Lambda = \int_0^{s_0} P(s) \mathrm{d}s$$

を定義し，この Λ を式 (3.22) に従って $f(L/\xi)$ とおけば，臨界指数を決定できることになる．

---

* A_β, B_β は規格化条件 $\int_0^\infty P(s) = 1, \int_0^\infty sP(s) = 1$ で決まる定数である．具体的にはガンマ関数を使って $B_\beta = \beta\Gamma[\beta/2]/2\Gamma[(1+\beta)/2]$，$A_\beta = 2B_\beta^{1+\beta}/\Gamma[(1+\beta)/2]$ と表される．

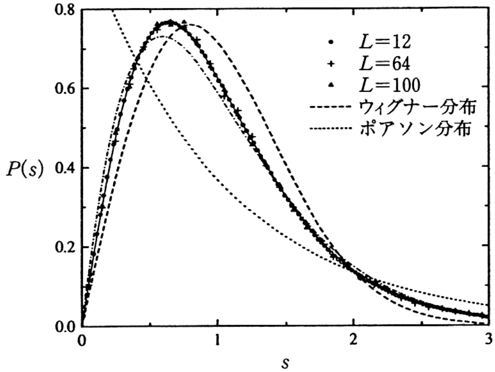


図 3.8　臨界点での準位統計．破線は $\beta=1$ のウィグナー分布で，点線はポアソン分布である［文献 51) より］

実際に，このようにすることで臨界指数が決定できることが最近になって明らかになった[43–52]．面白いのは，ちょうどアンダーソン転移点上でウィグナー分布とポアソン分布の中間の性質をもつ

$$P_{\mathrm{c}}(s)=\begin{cases} s^{\beta} & (s\ \text{小}) \\ \exp(-\kappa s) & (s\ \text{大}) \end{cases} \tag{3.38}$$

という形のモデルによらない準位統計が得られることである．どうして中間的な性質を示すかというと，転移点では波動関数の広がり方が金属相ほど十分ではなく，いたるところ波動関数の振幅の小さいところがあり，準位の反発が十分に起こらないからである．

準位統計は転送行列では扱えないような状況で最も威力を発揮すると思われる．そのような例として，量子パーコレーションが挙げられる．パーコレーションとは図 3.9 のように格子点がランダムにつながったもので，このつながっている確率 p を増すにつれて，あるところ p_{c} で系の端から端までつながったクラスターができる現象をいう[53,54]．p_{c} はパーコレーション閾値と呼ばれている．

さて，このつながっているクラスター上を電子が運動している場合，どのような状態が実現されるだろう？ もしつながっている確率 p が p_{c} 以下なら系の端から端まで広がっているクラスターは存在しないので，もちろん電子の波動関数も端から端までは広がれず電流は流れない．よって系は絶縁体である．たと

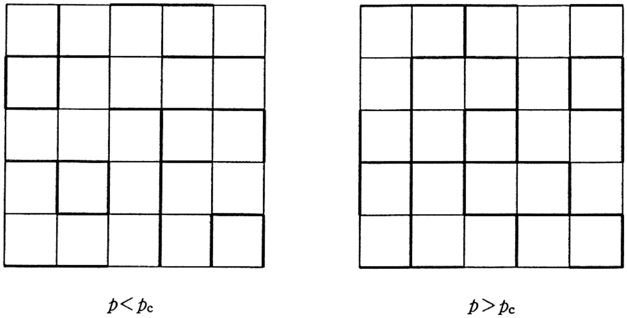


図 3.9 パーコレーションの概念図．太線がつながっているボンドを表す．格子点を結ぶボンドが確率 p でつながっている．p が小さいと孤立したクラスターしかできないが，p がパーコレーション閾値 p_c をこえると系の端から端までがつながる大きなクラスターができる

え確率 p が p_c 以上でも格子点のつながりはランダムなので，電子はアンダーソン局在を起こすであろう．よって，$p \geq p_c$ から金属相となるのではなく

$$p_q \geq p_c \tag{3.39}$$

を満たすある値 p_q から波動関数は系全体に広がり，系は金属的伝導を示すと予想される．こうした量子力学に従う粒子が系の端から端まで広がり始める現象は量子パーコレーションと呼ばれ，その臨界点 p_q は量子パーコレーション閾値と名づけられており，多くの研究がなされてきた[55–66]．

量子パーコレーションのハミルトニアンを式(3.1)から定義するのは簡単である．この場合，不規則性の起源は格子点のつながり方にあり，個々の格子点上のポテンシャルの値にあるのではないので，第2項は0としてよい．第1項は

$$V_{ij} = \begin{cases} \exp(\mathrm{i}\theta_{ij}) & \text{サイト } i \text{ と } j \text{ がつながっている場合} \\ 0 & \text{サイト } i \text{ と } j \text{ がつながっていない場合} \end{cases} \tag{3.40}$$

とすればよい．こうした系の固有値を取りだし，先に述べた処方箋で有限サイズスケーリングを行えば，臨界指数が決定できる．

量子パーコレーションに対する臨界指数 ν の評価はまちまちである．大きいものは2.0から[55–58, 64, 65]，小さいものは0.3程度まで[63]，かなりばらついている．最近の研究[67]では，この準位統計の方法を用いて，ν は表3.3のように

表 3.3　準位統計の方法で見積もった量子パーコレーションのパーコレーション閾値 p_{q} と臨界指数 ν．サイト間のホッピングが位相因子をもたないものと，ランダムな位相をもったものとで比較している［文献 67) より］

	p_{q}	ν
ホッピングの位相がすべて 0	$0.323 \pm .001$	$1.55 \pm .15$
ランダムな位相のホッピング	$0.308 \pm .001$	$1.44 \pm .16$

評価されている．アンダーソン転移特有の時間反転対称性の有無の効果を調べるため，式 (3.40) でホッピングの位相をすべて 0 にした時間反転対称性のある場合と，ホッピングの位相が 0 から 2π までランダムな値をとる時間反転対称性のないモデルを比較してある．前者はアンダーソン・モデルでの orthogonal のときの臨界指数と同じ臨界指数を示し，後者は unitary の場合と一致している．また，時間反転対称性が破れると，パーコレーション閾値 p_{q} が小さくなるのは，アンダーソン局在の効果が弱まり，つながる確率が小さくても系全体に広がる状態が存在するためと解釈できる．このように，量子パーコレーションも通常のアンダーソン転移と考えても差し支えないように，筆者には思われる．

3.3　転移点でのスケール普遍性

転移点では局在長が発散しており，長さのスケールがない．こうした場合は，さまざまな物理量がスケール不変になる．前述のスケーリング関数 Λ，準位統計がその例である．しかしながらこれらの量は直感的なイメージがつかみづらいし，実験的にも観測しづらい．ここでは転移点直上で現れる直感的にイメージのつかみやすい物理量のスケール不変な振る舞いについて述べる．

A．異常拡散とフラクタル性

準位統計のところで述べたように，転移点での波動関数は金属のように平面波的に広がっているのでもなく，絶縁体のように空間の一点に局在しているのでもない．転移点では長さのスケール ξ が発散していることから，波動関数が自己相似性を示し，フラクタル構造をとっていると思われている[68]．これが直接物理量にかかるだろうか?

不規則ポテンシャルがあるような系では電子は拡散運動をしている．この運動は拡散定数 D で記述される．この拡散定数を電気伝導度と結びつけよう．定

常状態では，電場によるドリフト電流密度と電子密度の空間依存性による拡散電流密度が打ち消しあっている．すなわち

$$-\frac{\boldsymbol{j}}{e} - D\nabla n_e = 0 \tag{3.41}$$

となっている．フェルミ・エネルギー E_{F} とポテンシャルエネルギーの和で表される化学ポテンシャル μ

$$\mu = -eV + E_{\mathrm{F}} \tag{3.42}$$

は一定である．この勾配をとり

$$\nabla E_{\mathrm{F}} = \nabla n_e \mathrm{d}E_{\mathrm{F}}/\mathrm{d}n_e = \nabla n_e \frac{1}{\mathrm{d}n_e/\mathrm{d}\mu} \tag{3.43}$$

を用いると，電気伝導度と拡散定数は

$$\sigma = e^2 \frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}\mu} D \tag{3.44}$$

という関係で結びついていることがわかる．これをアインシュタインの関係式と呼ぶ．

こうして伝導度は拡散係数と簡単に関係づけられ，ρ_{F} が有限の場合，同じ臨界指数をもつので，拡散の様子を調べるのは伝導度を調べることと等価である．そこで転移点付近での拡散現象を考えてみよう[69]．時刻 t における波束の広がりを $r(t)$ とする．この 2 乗平均値は，十分時間がたつと金属領域と絶縁体領域で

$$\overline{r^2(t)} = \begin{cases} 2dDt & \text{金属} \\ \frac{d(d+1)}{4}\xi^2 & \text{絶縁体} \end{cases} \tag{3.45}$$

となる．この量を金属側と絶縁体側で統一的に議論するために $\overline{r^2(t)}$ に対してスケーリング形

$$\overline{r^2(t)} = b^2 f(L_t/b, \xi/b) \tag{3.46}$$

を仮定してみる．L_t は時間によって決まる長さのスケールで，z を動的指数として

$$L_t \sim t^{1/z} \tag{3.47}$$

という形をとっていると仮定する．$b = \xi$ とおいて

$$\overline{r^2(t)} = \xi^2 f(L_t/\xi, 1) = t^{2/z} f_1[(x - x_{\mathrm{c}})t^{1/z\nu}] \tag{3.48}$$

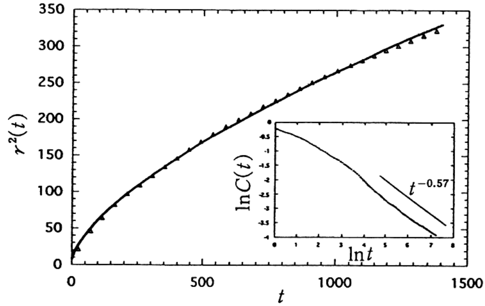


図 3.10　3 次元のアンダーソン転移点での異常拡散の様子．実線は $r^2(t) \sim t^{2/3}$ を表している．挿入図は $C(t)$ の振る舞い

となる．金属側では，$\overline{r^2(t)} \propto Dt \propto |x - x_c|^s t$ なので

$$\frac{2}{z} + \frac{s}{z\nu} = 1$$

となる．こうして

$$s = (z-2)\nu \tag{3.49}$$

が導かれ，ウェグナーの関係式 (2.22) から

$$z = d \tag{3.50}$$

がわかる．よって，転移点では

$$\overline{r^2(t)} \propto t^{\frac{2}{d}} \tag{3.51}$$

となる．これは異常拡散と呼ばれ，物理的には拡散係数が時間とともに減少していく様子を示していると解釈できる．実際にこの異常拡散の例を図 3.10 に示す．

空間が密に埋まっている平面波の場合，半径 r を大きくしていくとその中に含まれる波動関数の振幅(確率密度)は r^d に比例する．一方，局在状態では，半径が局在長よりも十分長い場合 $(r \gg \xi)$，半径 r の中に含まれる確率密度は半径に依存しないので，0 次元であると解釈できる．このように半径 r の球を考え，その中に含まれる確率密度の r 依存性からどれくらい波動関数が空間を埋めているかがわかる．準位統計のところで述べたように，転移点では波動関数

は空間を充填しきっていない．このとき半径 r の中に含まれている振幅は $\sim r^d$ でなく，r^{D_2} $(D_2 < d)$ となっており，これがフラクタル性を特徴づけている．フラクタル性を反映して，時刻 $t = 0$ である位置におかれた小さな波束が，時間発展して半径 $r(t)$ の大きさの波束となると，2 つの重なり $C(t)$ は

$$C(t) \equiv |\langle t|0\rangle|^2 \sim r^{-D_2} \sim t^{-D_2/d} \tag{3.52}$$

となる．

この振る舞いからフラクタル次元 D_2 を求めると，3 次元では $D_2 \approx 1.5$ と，空間次元の半分程度の次元が現れる [69–74]．転移点での波動関数は，通常の平面波と全く異なる振る舞いを示すことがわかるであろう．

B．コンダクタンスの分布

アンダーソン転移のスケーリング理論は，そもそもコンダクタンスの振る舞いがもとになっているのであるから，コンダクタンスを直接調べるのは大変興味深い．電気伝導度は久保公式で計算できるが，直感的な解釈がしづらいのと数値計算に向かないという欠点がある．

そこでコンダクタンスを議論するのに，便利な公式が提案されている．コンダクタンスの表式 (2.4) とアインシュタインの関係式 (3.44) を用いると

$$g = h\rho_{\rm F} L^d \frac{D}{L^2} \tag{3.53}$$

を得る．電子が拡散して系の端まで逃げる時間を

$$\delta t_{\rm e} = \frac{L^2}{D} \tag{3.54}$$

とすると，不確定性関係から端子のついた系の中の電子状態は

$$E_{\rm T} = \frac{h}{\delta t_{\rm e}} \tag{3.55}$$

程度の揺らぎをもつ．$E_{\rm T}$ はサウレス（Thouless）・エネルギーと呼ばれる．すると

$$g = \rho_{\rm F} L^d E_{\rm T} \tag{3.56}$$

が得られる．これがサウレス公式である．サウレス・エネルギーの幅にあるエネルギー準位の数を $N_{\rm T}$ とおくと

$$g = N_{\rm T} \tag{3.57}$$

となる．

もちろんサウレス・エネルギーを計算しなければコンダクタンスは計算できないのだが，定性的な議論はこのままでもできる[75)]．式(3.57)からコンダクタンスの平均は

$$\langle g\rangle = \langle N_{\mathrm{T}}\rangle \tag{3.58}$$

その揺らぎ δg は

$$\delta g^2 = \langle (N_{\mathrm{T}} - \langle N_{\mathrm{T}}\rangle)^2\rangle \tag{3.59}$$

となる．もし，固有値に全く相関が働いていない場合，揺らぎ δN^2 は N に等しくなるので

$$\langle (N_{\mathrm{T}} - \langle N_{\mathrm{T}}\rangle)^2\rangle = N_{\mathrm{T}}\ ,\ \delta g = \sqrt{g} \tag{3.60}$$

となる．つまり，コンダクタンスが大きいほど，サンプルごとの揺らぎは大きいはずである．ところが，固有値には準位統計で見たように反発が働いている．そのため，サウレス・エネルギーの間によりエネルギー準位を押し込めようとしても内側から反発され，逆にサウレス・エネルギーの外にエネルギー準位を出そうとしても外側から反発されてしまい，結局，N_{T} の揺らぎが押さえられることがわかる．詳しい解析により，この値は g がある程度大きければユニバーサルであることが知られている．結局

$$\delta g \approx 1 \tag{3.61}$$

が g がある程度以上大きくなると常に成り立っている．これが普遍的コンダクタンスの揺らぎである[76,77)]．以上より，金属領域でのコンダクタンスの分布関数は

$$P(g) \sim \exp\left(-\frac{(g - \langle g\rangle)^2}{2\Delta^2}\right) \tag{3.62}$$

となる．サイズを変えていくと平均値 $\langle g\rangle$ は $\langle g\rangle \sim L^{d-2}$ に従って（$d > 2$ の場合）大きくなるが，その分散 Δ はサイズに依存しない．前に述べたように Δ は準位の反発で決まっている．よって，Δ は時間反転対称性に依存する．

一方，絶縁体領域ではコンダクタンスは式(2.10)のように振る舞う．コンダクタンスの対数をとると

$$\log g = -2L\lambda_L\ ,\ \lambda_L = \frac{1}{\xi_L} \tag{3.63}$$

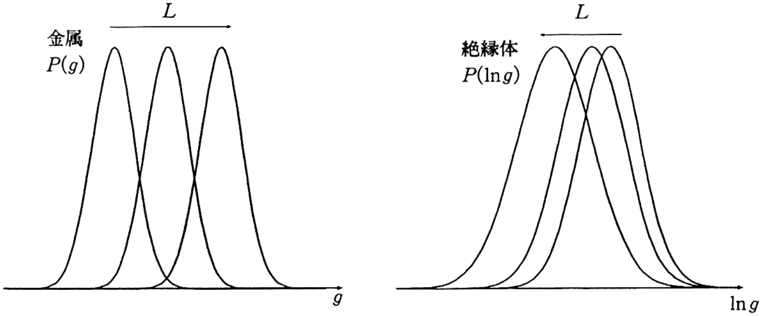


図 3.11　コンダクタンスの分布関数．金属側(左の図)では正規分布になる．サイズ L を大きくすると平均値は L^{d-2} で大きくなるが，分散はユニバーサルである．絶縁体側(右の図)では，分布関数は対数正規分布となり，対数平均 $\langle \log g \rangle$ は減少する．分散はユニバーサルではない

となる．λ_L を転送行列で計算した場合は $L \times L \times M$, $(M \gg L)$ のバーを考えたが，コンダクタンスを計算する場合は $L \times L \times L$ の立方体を考えなければならない．この場合，λ_L は不規則ポテンシャルの強さが同じでも，その配置が異なれば違う値をとる．つまりある分布関数に従っているのである．λ_L は中心極限定理に従って収束し，ガウス分布に従っている．よって

$$
\begin{aligned}
P(\log g) &= \int \exp\left(-\frac{(\lambda - \langle\lambda\rangle)^2}{2\Delta_\lambda^2}\right)\delta(\log g + 2L\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&\sim \exp\left(-\frac{(\log g + 2L\langle\lambda\rangle)^2}{8\Delta_\lambda^2 L^2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

という，対数正規分布をコンダクタンスが示すことがわかる．サイズを大きくしていくと，$\log g$ が $-\infty$ に近づき，コンダクタンスは当然ながら 0 になる．Δ_λ はサイズに依存し，コンダクタンスの揺らぎはユニバーサルではない．

それでは，臨界点ではコンダクタンスはどのような分布関数で記述されるのか? はじめに予想できるのは，これがサイズに依存しない，ユニバーサルな振る舞いを示すことである．これは 4 人組のスケーリング理論[8)]で述べた転移点で $g = g_c$ となっていることを含んでいる．実際の転移点でのコンダクタンスの分布関数 $P(g)$ は，g が小さいところでは絶縁体の性質，つまり対数正規分布に従い，g が大きいところでは，金属相で見られたガウス分布に従うことが予想できる．

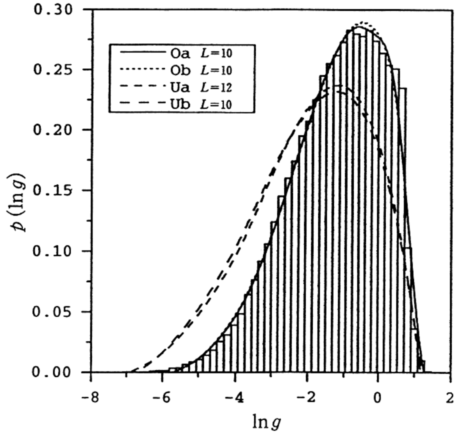


図 3.12 アンダーソン転移点でのコンダクタンスの分布関数．実線は orthogonal で破線は unitary の場合．時間反転対称性の有無のみで分布関数が決まっている．サイズ依存性も示さない．パラメータは図 3.6 と同じである［文献 35) より］

シャピーロ(Shapiro)はこの $P(g)$ を摂動計算から予想し，これが実際にサイズに依存していないことを示した[78,79]．しかしながら臨界指数の評価のときと同じように，摂動展開は3次元系の定量的な議論には適さない．数値的にコンダクタンスを求めるには，L^d の試料に不純物を含まない端子をつけたと仮定し，ひとつの端子から別の端子へと電子が抜ける透過係数 t を計算し，ランダウアー公式

$$g = \mathrm{Tr}\, t^\dagger t \tag{3.65}$$

を用いればよい[77,80–83]．数値計算の結果は上で述べた金属相と絶縁相の性質を兼ね備えているという予想を支持している[35,84–86]．これは最近，解析的計算によっても示されている[87]．

3.4　実験結果と温度スケーリング

以上で述べたように，3次元不規則電子系におけるアンダーソン転移の様子は，臨界点近傍および直上でかなり詳しく明らかになっている．ではこれにより実験事実が説明できるかというと，残念ながら実験的に決定された臨界指数は理論と一致せず，しかも系によって異なるように見える．3次元でのアンダーソン転移の解説を締めくくる前に，実験結果を整理しておく．

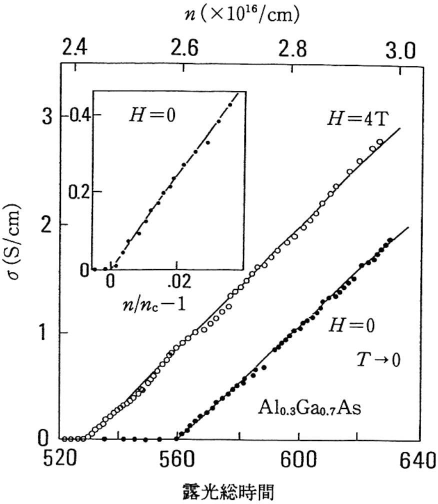


図 3.13　伝導度の電子濃度依存性．この実験では光を当てると当てた時間に比例して伝導電子が増えるという永年光伝導を利用している［文献 88) より］

アンダーソン転移が調べられているのは，主に不純物半導体である．これは電子密度などのパラメータを変えやすい，応用上重要であるなどの理由からである．この系の伝導度 $\sigma(T)$ の温度依存性から絶対零度での値 $\sigma(0)$ を求め，これをドーピング濃度 n や圧力 P，磁場 B などの関数として決定し，$\sigma(0)$ が 0 になる様子を調べ

$$\sigma(0) \sim |x - x_{\rm c}|^s \quad (x = n, P, B)$$

から臨界指数 s が決定される．

式 (2.1) で定義される伝導度の臨界指数 s を実験的に調べると，おおざっぱにいって $s \approx 0.5$ [89–94] という一群の物質と，$s \approx 1$ [88,95,96] を示す別の物質系があるように見える．前者は補償されていない系，後者は補償系と呼ばれるものである．ここで補償とは，正のイオンと負のイオン，同数だけドープしたものであり，こちらの方が，より不規則性が強いと思われる．

磁場をかけると時間反転対称性が破れ，臨界指数は一般に変わる．実際，実験を行うと上記の物質すべてで $s \approx 1$ となる．以上，まとめると表 3.4 のようになる．

表 3.4　実験と数値計算で得られた臨界指数 s

	補償された系	補償されていない系	数値計算
$s(B=0)$	≈ 1	≈ 0.5	1.57 ± 0.01
$s(B \neq 0)$	≈ 1	≈ 1	1.43 ± 0.02

A. 温度依存性とスケーリング

このように理論的に計算した臨界指数と実験で求められた臨界指数が食い違う．その原因をここで考えてみる．まず実験は有限温度で行われるので，これを絶対零度に外挿する必要がある．そこで，伝導度の温度依存性を金属側，絶縁体側で見てみよう．式 (2.24) より

$$\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}L} = 1 - \frac{a}{g}$$

となるので，これを積分して

$$\sigma = \frac{e^2}{h}\left(a_0 + \frac{a}{L}\right) \tag{3.66}$$

となる．温度が有限の場合は，非弾性散乱でアンダーソン局在のもとになる干渉効果が弱められる．非弾性散乱時間を τ_{in} とすると非弾性散乱長は $L_{\mathrm{in}} \sim \sqrt{D\tau_{\mathrm{in}}}$ となる．非弾性散乱時間の温度依存性を

$$\tau_{\mathrm{in}} \sim T^{-p} \tag{3.67}$$

として

$$L_{\mathrm{in}} \sim T^{-p/2}$$

になる．これを式 (3.66) の L に代入して

$$\sigma = \sigma_0 + AT^{p/2} \tag{3.68}$$

となる．

一方，絶縁体側では可変領域ホッピング[28)]が多くの系で見られる．絶縁体側では波動関数が局在長 ξ で局在しており，絶対零度では伝導度は 0 である．しかし，有限温度ではフォノンなどの散乱により，一つの局在中心にいた電子が距離 R だけ離れた別の局在中心にホップすることにより，電流を運べる．ところ

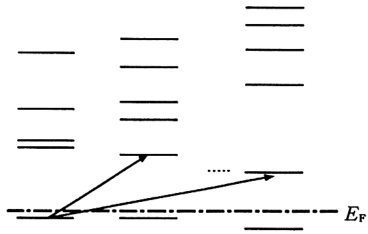


図 3.14　可変領域ホッピングの概念図．エネルギー差が小さく，吸収するフォノンのエネルギーが少なくてすむ状態は近くにはない．波動関数が局在しているので遠くの状態とは重なりが小さい

で，R が小さいと，とんだ先の状態のエネルギーはもとの状態のエネルギーとずれているであろうから，こうしたイベントを起こすためにはエネルギーの高いフォノンを使う必要がある．遠くまで飛べるとすれば，もとのエネルギーとかなり近い状態が見つけられ，低いエネルギーのフォノンで用は足りるが，遠くまで行くうちに，波動関数は減衰してしまい，とんだ先と元の状態との重なりが急激に小さくなってしまう．こうして

$$\exp\left(-2\frac{R}{\xi}-\frac{\Delta E}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

を最大化するホッピングが伝導に1番効くことになる．ここで，エネルギー E をもつフォノンの数はボルツマン分布に従っているとし，とんだ先の状態とのエネルギー差を ΔE とした．

$\Delta E \propto 1/R^d$ として最大値を求めると，結局

$$\sigma \sim \exp\left(-A\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(d+1)}\right),\ T_0=\frac{1}{k_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{F}}\xi^d} \tag{3.69}$$

を得る*．

式 (3.68)，(3.69) は全く異なる形に見える．しかし，転移点近傍では伝導度の温度依存性は連続的に変わるように観測されている．そこで2つを結びつけるためスケーリング形，式 (2.20) を拡張して議論しよう．伝導度の形として

$$\sigma(T)=b^{-\epsilon}f(L/b,\xi/b,L_{\mathrm{T}}/b) \tag{3.70}$$

* ここでの議論はだいぶ荒っぽい．ちゃんとした導出は文献 97) を参照．

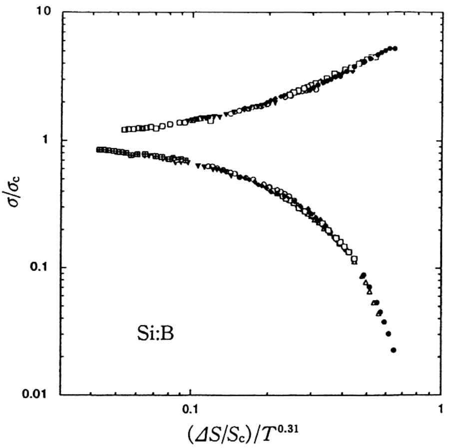


図 3.15　電気伝導度のスケーリングプロット．Si:B に圧力 S をかけてアンダーソン転移を観測している．$\sigma(T)$ を転移点での伝導度 $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ で割っているので，これは $(x-x_{\mathrm{c}})T^{-1/z\nu}$ のみの関数となる［文献 99) より］

を仮定する．$b=\xi$ とおくと

$$\sigma(T) = \xi^{-\epsilon} f(L/\xi, 1, L_{\mathrm{T}}/\xi)$$

となる．実験で調べている系は $L \gg L_{\mathrm{T}}$ となっており，L 依存性は見えないので

$$\sigma(T) = L_{\mathrm{T}}^{-\epsilon} h(L_{\mathrm{T}}/\xi) \tag{3.71}$$

を得る．

L_{T} は温度で決まる長さのスケールである．温度は絶対零度では周波数に置き換わることに注意すると，L_{T} の温度依存性は式 (3.47) で定義した動的臨界指数 z を用いて

$$L_{\mathrm{T}} \sim T^{-1/z}$$

となる．よって

$$\sigma(T) = T^{\epsilon/z} H(\xi^z T) = T^{\epsilon/z} F[(x-x_{\mathrm{c}})T^{-1/z\nu}] \tag{3.72}$$

を得る[98]．

式(3.72)を使い，最近実験データをフィットする試みがなされた[99]．これによると

$$z\nu \approx 3.2\ ,\ \epsilon/z \approx 0.5$$

となる．相互作用のない場合，$\epsilon = 1, z = d = 3, \nu \approx 1.6$ であったので，実験結果は相互作用を無視した理論では説明できない．つまり実験は単純なアンダーソン転移として解釈できないことを示している．

また，伊藤らの実験[93]では

$$\epsilon\nu \approx 0.5\ ,\ \epsilon/z \approx 0.3$$

となっている．単純に $\epsilon = 1$ とおいてしまうと

$$z \approx 3\ ,\ \nu \approx 0.5$$

となり，チャイーズらの不等式(2.36)を破ってしまう．いずれの場合も相互作用のない系でのアンダーソン転移の理論では実験の解釈として不十分であることを示している．

3.5 相互作用のある場合のアンダーソン転移の理論

電子間相互作用が不規則電子系の伝導度にどのような補正をもたらすかは，福山[100]やアルトシューラー(Altshuler) とアラノフ(Aronov)[101]の摂動論に始まり，フィンケルシュタイン(Finkelstein)[102]，カステラーニ(Castellani)ら[103]，ベリッツ(Belitz)とカークパトリック(Kirkpatrick)[104]の理論により，弱局在領域ではかなり理解されている．この場合，相互作用も繰り込みをうけサイズや温度の関数として記述され，拡散係数と相互作用の連立方程式によって伝導度の振る舞いが記述される．その結果，アンダーソン転移点付近でフェルミ・エネルギーでの状態密度が異常を示し，$x > x_{\mathrm{c}}$ を金属相として

$$\rho \sim \begin{cases} (x - x_{\mathrm{c}})^{\beta} & \text{金属相} \\ 0 & \text{絶縁相} \end{cases} \tag{3.73}$$

という異常を示すと思われている．この状態密度の異常はクーロン・ギャップとして知られているものである．この状態密度が相互作用のある場合のアンダー

ソン転移で，秩序パラメータの役割を果たす．

不規則ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ はハミルトニアンに

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r} V(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$$

という形で入る．$\langle\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\rangle$ が状態密度と関係することに注意すると，この項は秩序パラメータとランダムポテンシャルの積となっていることがわかる．ところでこのような問題としてよく知られているのが，磁場が空間的にランダムな場合の磁性体の問題である．このとき，秩序パラメータとなる磁気モーメント $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ とランダム磁場 $h(\boldsymbol{r})$ の積の形がハミルトニアンに入る．そこで相互作用している不規則電子系の問題を，ランダム磁場中の磁性体の理論と対応させて解釈しようという試みがなされている[105)]．

まず，単位体積，単位エネルギーあたりの物理量，例えば熱力学的状態密度 $(\partial n/\partial\mu)$，電子比熱の γ 値 $(\gamma = \lim_{T\to 0} C_V/T)$，帯磁率などを考えよう．$L_\Omega$ を温度，周波数などで決まる長さとすると，簡単な次元解析からこれらは

$$\chi = b^{-(d-z)} f(L/b, \xi/b, L_\Omega/b) \tag{3.74}$$

という振る舞いをすると予想できるが，上記の磁性体の相転移の理論では異常次元が現れ，次元は単純な空間次元から少しずれ $d-\theta$ となっている．よって χ の形を

$$\chi = b^{-(d-\theta-z)} f(L/b, \xi/b, L_\Omega/b) \tag{3.75}$$

と仮定する．これより，十分大きな系では

$$\chi = L_\Omega^{-(d-\theta-z)} f[(x-x_\mathrm{c})L_\Omega^{1/\nu}] \tag{3.76}$$

となる．$L_\Omega \sim \Omega^{-1/z}, T^{-1/z}$ とおくと

$$\chi = \begin{cases} \Omega^{(d-\theta-z)/z} f[(x-x_\mathrm{c})\Omega^{-1/z\nu}] \\ T^{(d-\theta-z)/z} f[(x-x_\mathrm{c})T^{-1/z\nu}] \end{cases} \tag{3.77}$$

となる．$\Omega, T \to 0$ の極限では，これらの物理量は臨界点付近ですべて

$$\chi \sim (x-x_\mathrm{c})^{\nu(d-\theta-z)} \tag{3.78}$$

という異常を示すことがわかる．

一方，拡散係数は式 (3.49) より

$$D \sim (x - x_{\rm c})^{\nu(z-2)} \tag{3.79}$$

となっている．アインシュタインの関係式 (3.44) より，電気伝導度は拡散係数と

$$\sigma \propto \frac{\partial n}{\partial \mu} D$$

という関係にあった．もし，$\partial n/\partial \mu$ が式 (3.78) の異常のほかに，$x = x_{\rm c}$ で 0 とならない解析的な項を含んでいたら，伝導度の指数 s は式 (3.49) のように

$$s = (z-2)\nu$$

となるが，$\partial n/\partial \mu$ が解析的な項をもたないときは

$$s = (z-2)\nu + \nu(d - \theta - z) = (d - \theta - 2)\nu \tag{3.80}$$

となる．いずれにしろ，単純なウェグナーの関係式 $s = (d-2)\nu$ をそのまま適用するのでは，相互作用の強い系での実験は説明できないことを示している．

こうして $\partial n/\partial \mu$ が転移点で消失する場合，式 (3.72) は

$$\sigma(T) = T^{(d-2-\theta)/z} F[(x - x_{\rm c})T^{-1/z\nu}] \tag{3.81}$$

となり，$\partial n/\partial \mu$ が転移点で有限の場合は

$$\sigma(T) = T^{(z-2)/z} F[(x - x_{\rm c})T^{-1/z\nu}] \tag{3.82}$$

となることがわかる．

このように相互作用の強い系の場合，伝導度だけでなく熱力学的諸量にも異常が現れるので，伝導度の実験のみでなく，帯磁率，比熱，1 粒子状態密度，熱力学的状態密度などの測定が望まれる．

4章 2次元電子系でのアンダーソン転移

3章では3次元系のアンダーソン転移を扱った．実際の物質の多くは3次元系だし，4人組のスケーリング理論[8]によれば2次元はすべて絶縁体なのだから，2次元電子系のアンダーソン転移というと奇異に感じる方も多いと思う．しかしながら，Si-MOS, GaAs/AlGaAs ヘテロ接合などは非常に興味深い物性を示し，応用上も重要な2次元電子系である．これらは決して特異な物質ではない．例えば，Si-MOS などはこの原稿を書いているパソコンの中だけでも億という単位で使われている．本章では最近は珍しいものでなくなった，2次元電子系における金属－絶縁体転移を解説する．

4.1 磁場中の転移

A. 量子ホール効果

2次元電子系に垂直に磁場をかけると量子ホール効果[12,37,106]，分数量子ホール効果[107,108]など大変興味深い現象が現れる．整数量子ホール効果のポイントは2点ある．ホール伝導度が，i) 磁場，電子濃度の関数として測定するとプラトーを示すことと，ii) そのプラトーでホール伝導度が e^2/h の整数倍に量子化されるということである．i) は，電子濃度，磁場の関数としてフェルミ・エネルギーが変化しても，フェルミ準位の状態が局在状態ならホール伝導度は変化しないことから説明される[109]．逆に量子化プラトーから別の量子化プラトーへと変化するとき，フェルミ準位での状態は非局在状態となっていなければならない．

強磁場中では，電子のエネルギーはランダウ準位

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \tag{4.1}$$

を形成する．$n \geq 0$ は整数で，$\omega_{\mathrm{c}} = eB/m$ はサイクロトロン振動数である．不規則ポテンシャルが存在すると，このランダウ準位が E_n のまわりに幅をもち，ランダウ・バンドをつくる．このとき，エネルギー E の状態の局在長が各ランダウ・バンドの中心，$E = E_n$ で

$$\xi_n \sim \frac{1}{|E - E_n|^{\nu}} \tag{4.2}$$

というように発散する[26]．この ν の値だが，最低ランダウ・バンド $(n = 0)$ では $\nu \approx 2.3 - 2.4$ と評価されている．この値は，不純物の形には依存しない，すなわちユニバーサリティを示している[110]．一方，より高いランダウ・バンド ($n \geq 1$) ではデルタ関数型のポテンシャルの場合，局在長の指数が高めに見えることが知られており，ユニバーサリティが成り立っていないのではと思われていたこともあった．これはスケーリング補正のためで，スケーリング補正を正しく取り入れるとユニバーサリティが確かに成立していることが最近わかった[111]．

量子ホール効果における臨界現象の普遍性はポテンシャルの有効距離，ランダウ・バンドなどを変えても臨界指数が不変であることである．デルタ関数と逆の長距離ポテンシャルの極限では，電子状態はポテンシャルの等高線に沿って広がっており[112,113]，たまたま近くにきた状態どうしがトンネルでつながっているという描像で記述される．これはネットワークモデルと呼ばれ[114]，その簡単さにより多くの研究がなされている．このモデルでも臨界指数は 2.4 程度と見積もられている．

量子ホール系でのアンダーソン転移は実験的にも研究されている．これを調べるには，局在長 ξ が発散する $E = E_n$ において，絶対零度，無限系の極限で不連続に変化する物理量を調べればよい．例えば，磁場を変えていくとフェルミ・エネルギー E が変化する．このときホール伝導度 σ_{yx} は $E = E_n$ となる磁場 B_{c} で，ある量子化プラトー値 me^2/h から $(m \pm 1)e^2/h$ の値へと遷移する．$|E - E_n| \sim |B - B_{\mathrm{c}}|$ なので，局在長は磁場の関数として

$$\xi \sim \frac{1}{|B - B_{\mathrm{c}}|^{\nu}}$$

という形で発散する．そこで σ_{yx} に対してスケーリング形，$f(L/b, \xi/b, L_T/b)$

を仮定すると

$$\sigma_{yx} = f(L/\xi, 1, L_T/\xi)$$

となる．低温で小さな系（$L_T \gg L$）ではこの関数の値を決めるのは L の大きさで，逆に大きな系（$L_T \ll L$）では，この関数の値を決めるのは温度である．よって

$$\sigma_{yx} = \begin{cases} h_L(L/\xi) = H_L[(B - B_{\rm c})L^{1/\nu}] & L_T \gg L \\ h_T(L/\xi) = H_T[(B - B_{\rm c})T^{-1/z\nu}] & L_T \ll L \end{cases} \tag{4.3}$$

となる．これに基づき，ウェイ(Wei)らはプラトー間遷移の温度依存性から $z\nu$ を 2.4 程度と見積もった[115]．また温度の代わりに有限周波数で調べた場合も $z\nu \approx 2.3$ が得られている[116]．これだけでは z と ν が決まらない．そこでコッホ(Koch)らは非常に小さな試料を低温で測定することで，プラトー間遷移のサイズ依存性を調べ，$\nu = 2.3 \pm 0.1$ を得た[117]．こうして $z \approx 1, \nu \approx 2.3$ が成り立っていることがわかる．しかしながら，これがユニバーサルな現象であることをいうためには，異なるランダウ・バンドで同じ臨界指数が得られることが実験的に示されなければならない．今のところ，高次のランダウ・バンドでは臨界指数が違って見えてしまっており[118]，ユニバーサリティの検証はできていない．

B．ランダム磁場

量子ホール効果の場合，ランダウ・バンドの形成が重要な役割を果たした．それ以外に電子が非局在状態をとる場合はないのだろうか? 1 次元格子模型の場合，サイト型ポテンシャルを含まず，ホッピング V_{ij} だけランダムとした

$$H = \sum_i V_{i,i+1}|i\rangle\langle i+1| + \text{h.c.} \tag{4.4}$$

で記述される系では，$E = 0$ のみが非局在状態になっていることは古くから知られている[119–121]．このようにサイトに不規則性があるのではなく，ホッピングに不規則性があると，バンドの中心に異常が現れることがある．

ホッピングの絶対値がランダムなら，ほとんどの状態が局在するのは自明なことと思われる．ではホッピングの絶対値が一定で，位相だけがランダムな場合はどうであろう?　1 次元の場合，ハミルトニアンは

$$H = \sum_i V e^{i\theta_i} |i\rangle\langle i+1| + \text{h.c.} \tag{4.5}$$

となり，各サイトでの位相を

$$|i\rangle \to \exp(i \sum_k^{i-1} \theta_k)|i\rangle \tag{4.6}$$

と変換すれば位相因子は全部消え，ハミルトニアンにランダムネスはなくなる．では，2 次元ではどうであろう？ 正方格子では，サイトの数を N とするとサイトとサイトをつなぐボンドの数は $2N$ となるので，どんなにサイトの位相をいじっても，ボンドの位相を消すことはできない．よって 2 次元の格子模型

$$H = \sum_{<i,j>} V e^{i\theta_{ij}} |i\rangle\langle j| \tag{4.7}$$

はランダム系となる．

サイト型の不純物の場合は，古典的なポテンシャル障壁の効果と量子力学的干渉効果とトンネル効果が複雑に絡み合って局在が起きる．一方，この 2 次元のランダム位相モデルは，いわばベクトルポテンシャルによるアンダーソン局在である．これは純粋に量子力学的位相の効果が生み出すもので，理論的に大変興味深い．また，高温超伝導体におけるフラックス相，分数量子ホール効果における複合フェルミオン模型での準粒子なども，この模型と関係があるといわれている．それゆえ，この問題は解析的な方法[122,123]，局在長の数値スケーリング[124–127]，対角化[128]，運動方程式の方法[129]，コンダクタンスの計算[127,130–132]などで精力的に調べられた．コンダクタンスの揺らぎと状態密度の振る舞いから，現在では，このモデルは $E \neq 0$ では通常の時間反転対称性の破れた系でのアンダーソン局在で記述され，状態は局在しているが，$E = 0$ だけは例外であると思われている．そこではコンダクタンスの揺らぎが増大し[127,131]，状態密度が発散していることが示されている[127]．

4.2　スピン-軌道相互作用

これまで見てきた 2 次元電子系でのアンダーソン転移は，量子ホール効果にしろ，ランダム位相モデルにしろ，エネルギーバンドのほんの一点を除いては状態はすべて局在しており，有限のエネルギー領域において金属相が現れると

いうことではなかった．一方，スピン-軌道相互作用が強い系(symplectic ユニバーサリティクラス)では，ベータ関数が 2 次元で[10, 19, 20)]

$$\beta(g) = \frac{a}{g}\ ,\ a > 0 \tag{4.8}$$

となることが知られている．つまり，ミクロな系で十分大きなコンダクタンスが与えられれば，サイズを大きくするにつれてコンダクタンスは増大しつづけ，無限系では必ずコンダクタンスが発散することになる．これはどう考えても直感的に納得できないが，いまだに明解な説明が見つかっていない問題である．

一方，数値的にはこの系はアンダーソン転移を示し，金属相が有限のバンド幅で存在していることがわかっている．数値的にスピン-軌道相互作用を考えるには，安藤によって提案されたハミルトニアン[133)]

$$H = \sum_{<i,j>,\sigma,\sigma'} V_{i,\sigma;j,\sigma'}|i,\sigma\rangle\langle j,\sigma'| + \sum_{i,\sigma} W_i|i,\sigma\rangle\langle i,\sigma| \tag{4.9}$$

が最もよく調べられている．σ, σ' はスピンインデックスである．磁場がかかったときは式 (3.31) のような位相因子が V についたが，スピン-軌道相互作用がある場合は，$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{s}$ 結合によって

$$V_{i,\sigma;i-k,\sigma'} = V[\exp(-\mathrm{i}\theta\sigma_k)]_{\sigma,\sigma'}\ ,\ k = \hat{x}, \hat{y} \tag{4.10}$$

となる*．$\hat{x}, \hat{y}$ はそれぞれ x,y 方向の単位ベクトルで，σ_k はパウリ行列である．

3 章で述べた転送行列法や準位統計の結果を有限サイズスケーリングによって解析することで，このモデルの臨界指数 ν は 2.0 から 2.8 程度と見積もられている[49, 133, 135)]．また，量子ホールのところで述べたネットワークモデルをスピン-軌道相互作用が強い場合に拡張したモデルでは，2.5[136)]，2.9[137)] が得られ，ホッピングの項に不規則性を仮定したモデル[138)] では，1.6[139)] と評価されており，結果はまちまちである．3 次元よりも 2 次元の方が大きな系を数値計算で扱えるので，より精度よく臨界指数が求められそうであるが，スケーリングの補正が大きいため，今のところ，2 次元のスピン-軌道相互作用の強い系での臨界指数は正確には決定されていない．

---

*3 次元の場合は，z 方向のホッピングを σ_z を使って定義すればよい[134)]．

2次元ではウェグナーの関係式から $s=(d-2)\nu=0$ なので，伝導度は不連続に立ち上がる．量子ホールの場合は局在長が発散するランダウ・バンドの中心で，伝導度が $0.5e^2/h$ 程度になり，転移点以外では状態は局在しているので，伝導度は0である．一方，スピン-軌道相互作用が強い系では，伝導度は絶縁体で0だったのが，転移点で不連続に $\approx 1.5e^2/h$ になる[140,141]．今のところ，転移点を越えた金属側で伝導度が無限になるというスケーリング理論の予想を指示する報告はなされていない．

4.3　2次元系での金属-絶縁体転移の実験

4人組のスケーリング理論以来，前節までで述べてきた磁場中やスピン-軌道相互作用が強い系は例外だとして，2次元電子系では状態はすべて局在しており，系は絶縁体であると思われていた．その根拠は2章で述べたベータ関数の振る舞いであったが，この振る舞いを導くには1変数スケーリングが成り立っているのと，ベータ関数が単調という仮定があった．前者は物理的にも深遠な原理に基づいているように思える．一方，後者の根拠は乏しい．事実，スピン-軌道相互作用が強い系ではベータ関数の高次の補正項は，これが単調でないことを示している[19,20]．しかしながら，実験では温度を下げると2次元電子系の伝導度は減少し，低温極限で絶縁体になるように見えたので，多くの研究者は2次元電子系はすべて絶縁体であると信じていた．

ところが，高移動度 $(3\sim7\times10^4)$ $\mathrm{cm^2/V{\cdot}s}$ のSi-MOSでは，温度を下げると伝導度が逆に増加したのである[142–145]．この研究が出るまでSi-MOSの試料の移動度は2000〜6500 $\mathrm{cm^2/V{\cdot}s}$ であったので，これらの試料は1桁大きな移動度をもっている．移動度は散乱時間 τ に比例しており，τ はランダムポテンシャルの強さ(正確にはポテンシャル揺らぎの2乗，式(1.15)参照)に反比例しているので，新しい試料では，ランダムネスの効果が従来よりもかなり小さくなっている．このような高移動度の試料では，電子密度が小さい場合は低温で電気抵抗が増大して絶縁体になるように見えるが，電子密度が大きくなるとある値を境に抵抗が減少するのである．図4.1にその実験結果を示す．

このデータに対して，スケーリングプロットが行われた[143]．式(3.72)にならい，金属-絶縁体転移が生じる臨界電子濃度を n_c とし，それからのずれを

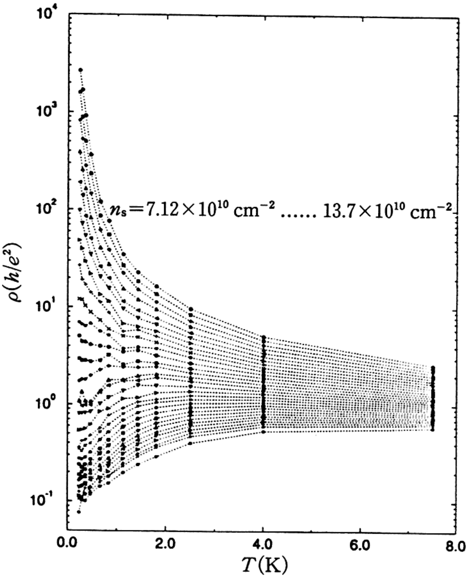


図 4.1　抵抗 ρ の温度依存性．各曲線は異なる電子密度に対応する［文献 143) より］

$\delta_n = (n - n_c)/n_c$ とおく．転移点では伝導度に顕著な温度依存性が見られないことから，$\epsilon = 0$ として，抵抗 ρ の温度 T と電子密度 n への依存性は

$$\rho(T, n) = \frac{h}{e^2} f_1(\delta_n T^{-1/z\nu}) \tag{4.11}$$

となる．つまり異なる電子密度 n に対して ρ の T 依存性をプロットした図 4.1 の曲線群は，横軸を $\delta_n T^{-1/z\nu}$ に変えると，図 4.2 のように単一の曲線にまとまるのである．

実験データはさらに興味深い特徴を示している．まず $n > n_c$ ($\delta_n > 0$) の金属領域での伝導度 $\sigma(\delta_n, T)$ と $n < n_c$ の絶縁体領域での抵抗 $\rho(-\delta_n, T)$ を，それぞれ転移点 $\delta_n = 0$ での値 σ_c と $\rho_c (= 1/\sigma_c)$ で割って無次元化した量の間には

$$\frac{\rho(-\delta_n, T)}{\rho_c} = \frac{\sigma(\delta_n, T)}{\sigma_c} \tag{4.12}$$

という関係が成立している[146)]．これは duality と呼ばれ，量子ホール液体と絶縁相の間での $I - V$ 特性などにも見られ注目を集めている関係である[147)]．

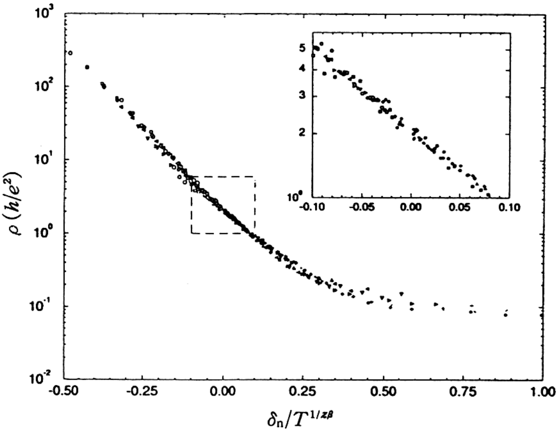


図 4.2 図 4.1 で横軸を $\delta_n T^{-1/z\nu}$ $(z\nu = 1.6)$ にしたもの［文献 143) より］

有限の電場 E をかけてたときの非線形伝導度 $\sigma(E)$ $(=j(E)/E$, j は電流密度) も面白い特徴を示す[144)]．今度は，$L_E \propto E^{-1/z_E}$ という長さを導入すると

$$\rho(E, n) = \frac{h}{e^2}\frac{1}{f(L_E/\xi)} = f_2(\delta_n E^{-1/z_E \nu}) \tag{4.13}$$

というスケーリング特性が期待される．実験結果はこれを見事に支持している．

こうしたスケーリングプロットから ρ_c，$z\nu$，$z_E\nu$ の値が評価できる．まず ρ_c の値は $2\sim3h/e^2$ である．ρ_c，もしくは σ_c の値がまちまちなのは，試料の形状が効いているかもしれないので気にしなくてもよい．幅 L_x，長さ L_y の試料で電流を y 方向に流したときのコンダクタンスは，波動関数の y 方向の局在長を ξ とすると

$$g \approx \mathrm{e}^{-2L_y/\xi}$$

程度である．転移点では $\xi/L_x = \Lambda = \Lambda_c$ なので

$$g_c \approx \mathrm{e}^{-2L_y/L_x\Lambda_c} \tag{4.14}$$

が得られる．これを伝導度にやきなおすと

$$\sigma_c \approx \frac{e^2}{h}\frac{L_y}{L_x}\mathrm{e}^{-2L_y/L_x\Lambda_c} \tag{4.15}$$

となり，L_x と L_y の比によって σ_c の値が変わって見えるのである．

$z\nu$ の値はいろいろな実験で 1.2〜1.6 と評価されている．また，z_E と z の間には単純な関係式がある．前出の $L_T \propto T^{-1/z}$ とは転移点付近での系の特徴的なエネルギー k_BT が(長さ) $^{-z}$ でスケールすることを意味している．有限電場の場合，特徴的なエネルギーが静電エネルギーに置き換わるであろうから，$eEL_E \propto L_E^{-z}$ とおくことにより

$$L_E \propto E^{-1/(z+1)} = E^{-1/z_E}\ ,\ z_E = z + 1$$

が得られる．これより実験結果のスケーリングプロットから決めた $z_E\nu$ と $z\nu$ から，z と ν が原理的には決定できるはずである．しかし $z\nu$ も $z_E\nu$ も誤差が大きく，これから定量的な議論をするのは実際には難しい．

さて，このようにきれいな実験結果が次々と出てくると，理論の方からもいろいろと提案が出てくる．まずこの転移がスピン-軌道相互作用によるものだという提案だが，移動度が小さい系ではスピン-軌道相互作用の効果が顕著には見られなかったことから，あまり支持を得ていない．次に 4 人組のスケーリング理論を修正するという試みであるが[148]，これは “こう仮定すればこうなる” という議論で，何かメカニズムについて明らかにしているわけではない．今のところ明らかになっているのは，この系は相互作用の効果がかなりきいているということである．

5章 おわりに

本解説で，ランダムな系での伝導現象が，実は非常に規則的な法則，スケーリング則に従っていることが理解していただけたと思う．アンダーソン転移の理論は実は光[149,150]や格子振動[119,151]など，あらゆる波動現象に適用できる．光の場合，吸収，放出の効果を考えなければならないので，ハミルトニアンがエルミートでなくなる．このような非エルミート行列に帰着するランダム系に関しては最近進展があり，興味深い現象が多々見つかっており，今後の発展が期待される[152,153]．格子振動の局在問題を考える場合，重要となるのは非線形性である．ランダムネスと非線形性の効果が局在にどのような影響を及ぼすか，大変興味深い[154,155]．

4章で述べたようにスピン-軌道相互作用の強い2次元電子系では，金属相の伝導度が無限大になってしまう．この系では，伝導度(拡散係数)のスケーリングだけでなく，スピン-軌道散乱時間もサイズに依存することがグレンペル(Grempel)[156]や川畑[157]によって指摘されている．この系は恐らく単純な1変数スケーリングでは説明できないと思われる．

4章で述べた2次元電子系の金属 - 絶縁体転移の理論は，今のところ決定的なものはない．アルトシューラーとマスロフ(Maslov)は，これを説明するにはアンダーソン転移を持ち出すまでもないと主張している[158]．彼らは酸化シリコン層にトラップされた正孔の数がゲート電圧の関数として変化し，これにより正孔による散乱が変化して抵抗が変化するというモデルを考え，実験結果をことごとく説明した．しかし同様の転移がSi/SiGeヘテロ接合,[159,160] GaAs/$Al_xGa_{1-x}As$ヘテロ接合[161–163] でも見られているので，Si-MOSを念頭においたこのモデルですべて決着がついたわけではない．こうした系では不規則ポテンシャルは比較的弱く，電子間相互作用の効果が重要となっていると信じられている．そ

のため，不規則電子系において相互作用がどのような役割を果たすかを真剣に検討する必要がでてくる．

相互作用がどのような効果を局在にもたらすかを調べるため，2粒子がランダムポテンシャル中を運動している問題が，最近盛んに議論されている[164]．この研究でわかったのは，こんな単純な問題でさえ，われわれは十分に理解していないということである．一方，少し前にモット転移をスケーリング理論によって解析する試みが成功した[165]．こうして不規則性によって生じるアンダーソン転移も，相互作用によって生じるモット転移も，スケーリング理論の枠組みで扱えたことになる．相互作用の強い不規則電子系の実験データもスケーリング理論で解析されつつある．この難問の解決もようやく光明が見え始めている．

本稿で紹介した研究結果の一部は，筆者が東邦大学理学部の小野嘉之教授，河原林透講師，ハンブルク大学物理学科のクラマー(Bernhard Kramer)教授，大阪大学理学部のスレヴィン(Keith Slevin)助教授らと行ったものである．また，慶応大学理工学部の伊藤公平，渡部道生両氏からは実験家の立場から有益なコメントをいただいた．こうした方々との議論を通じて非常に多くのことを学ぶことができた．とりわけ，小野先生からは，局在問題のいろはを教えていただいた．ここに謝意を表したい．

参考文献

1) P.W. Anderson : *Science*, **177**,393 (1972)
2) 鹿児島誠一編著 : 一次元電気伝導体, 掌華房 (1982)
3) M. Imada, A. Fujimori & Y. Tokura : *Rev. Mod. Phys.*, **70**,1039 (1998) ; 日本語の解説としては，例えば，日本物理学会誌 1999 年 2 月号にモット転移に関する特集が組まれているのでこれを参照されたい.
4) E. P. Wigner : *Phys. Rev.*, **46**,1002 (1934)
5) P.W. Anderson : *Phys. Rev.*, **109**,1492 (1958)
6) 福山秀敏 : アンダーソン局在 (物理学最前線 2), 共立出版 (1983)
7) 川畑有郷 : アンダーソン局在のスケーリング理論 (物理学最前線 13), 共立出版 (1985)
8) E. Abrahams *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **42**,673 (1979)
9) F. Wegner : *Z. Phys.*, B**25**,327 (1976)
10) S. Hikami, A. Larkin & Y. Nagaoka : *Prog. Theor. Phys.*, **63**,707 (1980)
11) P. A. Lee & T. V. Ramakrishnan : *Revs. Mod. Phys.*, **57**,287 (1985)
12) 長岡洋介，安藤恒也，高山一 : 局在・量子ホール効果・密度波, 岩波書店 (1993)
13) M. Schreiber & H. Grussbach : *Phys. Rev. Lett.*, **76**,287 (1996)
14) S. Hikami : *Phys. Rev.*, B**24**,2671 (1981)
15) K.B. Effetov, A.I. Larkin & D.E. Khmel'nitsukii : *Soviet Phys. JETP*, **52**,568 (1980)
16) K.B. Efetov : Supersymmetry in disorder and chaos. Cambridge Univ. Press (1997)
17) M.L. Mehta : Random matrices, 2nd ed. Academic Press (1991)
18) F. Wegner : *Nuclear Physics*, B**316**,663 (1989)
19) S. Hikami : *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **107**,213 (1992)
20) W. Bernreuther & F. Wegner : *Phys. Rev. Lett.*, **57**,1383 (1986)
21) T. Dupré : *Phys. Rev.*, B**54**,12763 (1996)
22) J.T. Chayes, L. Chayes, D.S. Fisher & T. Spencer : *Phys. Rev. Lett.*, **57**,2999 (1986)
23) B. Kramer : *Phys. Rev.*, B**47**,9888 (1993)
24) A.B. Harris : *J. Phys.*, C**4**,1145 (1971)
25) A. MacKinnon & B. Kramer : *Z. Phys.*, B**53**,1 (1983); 総合報告として

B. Kramer & A. MacKinnon : *Rep. Prog. Phys.*, **56**, 1469 (1993) が挙げられる.

26) T. Ando & H. Aoki : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **54**,2238 (1985)
27) V.I. Oseledec : *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19**,197 (1968)
28) N.F. Mott : Metal- Insulator Transitions. Taylor and Francis (1990) ; 邦訳は「モット・金属と非金属の物理」(丸善, 1996 年)
29) P. Lloyd : *J. Phys.*, C**2**,1717 (1969)
30) R. Johnston & H. Kunz : *J. Phys.*, C**16**,4565 (1983)
31) D.J. Thouless : *J. Phys.*, C**16**,L929 (1983)
32) D.E. Rodrigues, H.M. Pastawski & J.F. Weisz : *Phys. Rev.*, B**34**,8545 (1986)
33) K. Slevin & T. Ohtsuki : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,382 (1999)
34) M. Henneke, B. Kramer & T. Ohtsuki : *Euro. Phys. Lett.*, **27**,389 (1994)
35) K. Slevin & T. Ohtsuki : *Phys. Rev. Lett.*, **78**,4083 (1997)
36) T. Kawarabayashi, B. Kramer & T.Ohtsuki : *Phys. Rev.*, **B57**,11842 (1998)
37) 青木秀夫 : 量子ホール効果 (物理学最前線 11), 共立出版 (1985)
38) T. Ohtsuki, B. Kramer & Y. Ono : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62**,224 (1993)
39) J.T. Chalker & A. Dohmen : *Phys. Rev. Lett.*, **75**,4496 (1995)
40) E.P. Wigner : *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47**,790 (1951)
41) F.J. Dyson : *J. Math. Phys.*, **3**,140,157,166 (1962)
42) 長谷川洋 : 量子準位統計 (物理学最前線 28), 共立出版 (1991)
43) B.I. Shklovskii, B. Shapiro, B.R. Sears, P. Lambrianides & H.B. Shore : *Phys. Rev.*, **B47**,11487 (1993)
44) Y. Ono & T. Ohtsuki : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62**,3813 (1993)
45) E. Hofstetter & M. Schreiber : *Phys. Rev.*, B**48**,16979 (1993)
46) E. Hofstetter & M. Schreiber : *Phys. Rev.*, B**49**,14726 (1994)
47) S.N. Evangelou : *Phys. Rev.*, B**49**,16805 (1994)
48) M. Batsch, L. Schweitzer, I. Kh. Zharekeshev & B. Kramer : *Phys. Rev. Lett.*, **77**,1552 (1996)
49) L. Schweitzer & I. Kh. Zharekeshev : *J. Phys. : Condens. Matter*, **9**,L377 (1997)
50) T. Kawarabayashi, T. Ohtsuki, K. Slevin & Y. Ono : *Phys. Rev. Lett.*, **77**,3593 (1996); 河原林透, 小野嘉之 : 固体物理 **34**, 309 (1999)
51) I. Kh. Zharakeshev & B. Kramer : *Phys. Rev. Lett.*, **79**,717 (1997)
52) E. Hofstetter : *Phys. Rev.*, B**57**,12763 (1998)
53) D. Stauffer & A. Aharony : Introduction to Percolation Theory. Taylor

and Francis (1994) ; 邦訳は「浸透理論の基礎」(小田垣孝訳, 吉岡書店, 1988 年)
54) 小田垣孝 : パーコレーションの科学, 掌華房 (1993)
55) T. Odagaki & K.C. Chang : *Phys. Rev.*, B**30**,1612 (1984)
56) K.C. Chang & T. Odagaki : *J. Phys.*, A**20**,L1027 (1987)
57) L. Root & J.L. Skinner : *Phys. Rev.*, B**33**,7738 (1986)
58) L. Root, J.D. Bauer & J.L. Skinner : *Phys. Rev. B*, B**37**,5518 (1988)
59) C.M. Soukoulis, Q. Li & G.S. Grest : *Phys. Rev.*, B**45**,7724 (1992)
60) Y. Avishai & J.M. Luck : *Phys. Rev.*, B**45**,1074 (1992)
61) Y. Shapir, A. Aharony & A.B. Harris : *Phys. Rev. Lett.*, **49**,486 (1982)
62) Y. Meir, A. Aharony & A.B. Harris : *Europhys. Lett.*, **10**,275 (1989)
63) I. Chang *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **74**,2094 (1995)
64) Th. Koslowski & W. von Niessen : *Phys. Rev.*, B**42**,10342 (1990)
65) Th. Koslowski & W. von Niessen : *Phys. Rev.*, B**44**,9926 (1991)
66) R. Berkovits & Y. Avishai : *Phys. Rev.*, B**53**,R16125 (1996)
67) A. Kaneko & T. Ohtsuki : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **68**,1488 (1999)
68) H. Aoki : *J. Phys.*, C**16**,L205 (1983)
69) T. Ohtsuki & T. Kawarabayashi : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66**,314 (1997)
70) C.M. Soukoulis & E.N. Economou : *Phys. Rev. Lett.*, **52**,565 (1984)
71) M. Schreiber : *Phys. Rev.*, B**31**,6146 (1985)
72) M. Schreiber & H. Grussbach : *Phys. Rev. Lett.*, **67**,607 (1991)
73) T. Brandes, B. Huckestein & L. Schweitzer : *Annalen der Physik*, **5**,633 (1996)
74) B. Huckestein & R. Klesse : *Phys. Rev.*, B**59**,9714 (1999)
75) B.L. Altshuler & B.I. Shklovskii : *Sov. Phys. JETP*, **64**,127 (1986)
76) P.A. Lee, A.D. Stone & H. Fukuyama : *Phys. Rev.*, B**35**,1039 (1987)
77) 川畑有郷 : メゾスコピック系の物理学, 培風館 (1997)
78) B. Shapiro : *Phys. Rev. Lett.*, **65**,1510 (1990)
79) A. Cohen & B. Shapiro : *Int. J. Mod. Phys.*, B**6**,1243 (1992)
80) R. Landauer : *IBM J. Res. Dev.*, **1**,223 (1957)
81) R. Landauer : *Z. Phys.*, B**21**,247 (1975)
82) R. Landauer : *Z. Phys.*, B**68**,217 (1987)
83) M.Büttiker : *Phys. Rev.*, B**38**,9375,12724 (1988)
84) P. Markos & B. Kramer : *Phil. Mag.*, B**68**,357 (1993)
85) C.M.Soukoulis, X. Wang, Q. Li & M.M. Sigalas : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,668 (1999)
86) K. Slevin & T. Ohtsuki : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,669 (1999)
87) K.W. Muttalib & P. Wölfle : *Phys. Rev. Lett.*, **83**,3013 (1999)

88) S. Katumoto *et al.* : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **56**,2259 (1987)
89) T. F. Rosenbaum *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **45**,1723 (1980)
90) P. F. Newman & D. F. Holcomb : *Phys. Rev.*, B**28**,638 (1983)
91) W. N. Shafarman *et al.* : *Phys. Rev.*, **40**,1216 (1989)
92) P. Dai *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **66**,1914 (1991)
93) K. M. Itoh *et al* : *Phys. Rev. Lett.*, **77**,4058 (1996)
94) M. Watanabe *et al.* : *Phys. Rev*, B**58**,9851 (1998)
95) Y. Nishio, K. Kajita & W. Sasaki : *Solid State Comm.*, **79**,1017 (1991)
96) G. A. Thomas *et al.* : *Phys. Rev.*, B**25**,4288 (1982)
97) V. Ambegaoker, B.I. Halperin & J.S. Langer : *Phys. Rev.*, B**4**,2619 (1971)
98) D. Belitz & T.R. Kirkpatrick : *Phys. Rev.*, B**52**,13922 (1995)
99) S. Bogdanovich,M.P. Sarachik & R.N. Bhatt : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,137 (1999)
100) H. Fukuyama : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **50**,3652 (1981)
101) B.L. Altshuler & A.G. Aronov : *JETP Lett.*, **33**,499 (1981)
102) A.M. Finkelstein : *Soviet Phys. JETP*, **57**,97 (1983)
103) C. Castellani, C. Di Castro, P.A. Lee & M. Ma : *Phys. Rev.*, B**30**,527 (1984)
104) D. Belitz & T.R. Kirkpatrick : *Rev. Mod. Phys.*, **66**,261 (1994)
105) D. Belitz & T.R. Kirkpatrick : *Phys. Rev. Lett.*, **74**,1178 (1995)
106) 吉岡大二郎：量子ホール効果, 岩波書店 (1998)
107) 中島龍也・青木秀夫： 分数量子ホール効果 (多体電子論 III), 東京大学出版会 (1999)
108) D. Yoshioka : *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **84**,97 (1985)
109) H. Aoki & T. Ando : *Solid State Commun.*, **38**,1079 (1981)
110) B. Huckestein : *Rev. Mod. Phys.*, **67**,357 (1995)
111) B. Huckestein : *Phys. Rev. Lett.*, **72**,1080 (1994)
112) M. Tsukada : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **41**,1466 (1976)
113) Y. Ono : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **51**,237 (1982)
114) J.T. Chalker & P.D. Coddington : *J. Phys.*, C**21**,2665 (1988)
115) H.P. Wei, D.C. Ttsu, M.A. Paalanen & A.M.M. Pruisken : *Phys. Rev. Lett.*, **61**,1294 (1988)
116) L.W. Engel *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **71**,2638 (1993)
117) S. Koch *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **67**,883 (1991)
118) J. Wakabayashi *et al.* : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **61**,1691 (1992)
119) K. Ishii : *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 53,77 (1973)
120) T.P. Eggarter & R. Riedinger : *Phys. Rev.*, B**18**,569 (1978)

121) A. Mielke & F. Wegner : *Z. Phys.*, **62**,1 (1985)
122) B.L. Altshuler & L.B. Ioffe : *Phys. Rev. Lett.*, **69**,2979 (1992)
123) A.G. Aronov, A.D. Mirlin & P. Wölfle : *Phys. Rev.*, B**49**,16609 (1994)
124) T. Sugiyama & N. Nagaosa : *Phys. Rev. Lett.*, **70**,1980 (1993)
125) D. Lee & J.T. Chalker : *Phys. Rev. Lett.*, **72**,1510 (1994)
126) K. Yakubo & Y. Goto : *Phys. Rev.*, B**54**,13432 (1996)
127) A. Furusaki : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,604 (1999); 古崎昭：固体物理 **34**, 784 (1999)
128) V. Kalmeyer *et al.* : *Phys. Rev.*, B**48**,11095 (1993)
129) T. Kawarabayashi & T. Ohtsuki : *Phys. Rev.*, B**51**,10897 (1995)
130) Y. Avishai, Y. Hatsugai & M. Kohmoto : *Phys. Rev.*, B**47**,9561 (1993)
131) T. Ohtsuki, K. Slevin & Y. Ono : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62**,3979 (1993)
132) J.A. Vergés : *Phys. Rev.*, B**57**,870 (1998)
133) T. Ando : *Phys. Rev.*, B**40**,5325 (1989)
134) K. Slevin, J-L. Pichard & P.A. Mello : *J. Phys. 1 (France)*, **6**,529 (1996)
135) U. Fastenrath *et al.* : *Physica*, **A172**,302 (1991)
136) R. Merkt. M. Janssen & B. Huckestein : *Phys. Rev.*, B**58**,4394 (1998)
137) K. Minakuchi : *Phys. Rev.*, B**58**,9627 (1998)
138) S.N. Evangelou & T. Ziman : *J. Phys.*, C**20**,L235 (1987)
139) S.N. Evangelou : *Physica*, A**167**,199 (1990)
140) P.Markos : *Phys. Rev. Lett.*, **83**,588 (1999)
141) T. Kawarabayashi & T. Ohtsuki : *Phys. Rev.*, B**53**,6975 (1996)
142) S.V. Kravchenko *et al.* : *Phys. Rev.*, B**50**,8039 (1994)
143) S.V. Kravchenko *et al.* : *Phys. Rev.*, B**51**,7038 (1995)
144) S.V. Kravchenko *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **77**,4938 (1996)
145) D. Popovic, A.B. Fowler & S. Washburn : *Phys. Rev. Lett.*, **79**,1543 (1997)
146) D. Simonian, S.V. Kravchenko & M.P. Sarachik : *Phys. Rev.*, B**55**,13421 (1997)
147) D. Shahar *et al.* : *Science*, **274**,589 (1996)
148) V. Dobrosavljevic *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **79**,455 (1997)
149) S. John : *Phys. Today*, May,32 (1991)
150) D.S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk & R. Righini : *Nature*, **390**,671 (1997)
151) A. Mielke & F. Wegner : *Z. Phys.*, **62**,1 (1985)
152) N. Hatano & D.R. Nelson : *Phys. Rev. Lett.*, **77**,570 (1996)
153) N. Hatano & D.R. Nelson : *Phys. Rev.*, B**56**,8651 (1997)
154) M.J. McKenna, R.L. Stanley & J.D. Maynard : *Phys. Rev. Lett.*, **69**,1807

(1992)
155) M.I. Molina : *Phys. Rev.*, **58**,12547 (1998)
156) D.R. Grempel : *J. Phys.*, C**20**,3143 (1987)
157) A. Kawabata : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **57**,1717 (1988)
158) B.L. Altshuler & D.L. Maslov : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,145 (1999)
159) J. Lam *et al.* : *Phys. Rev.*, B**56**,R12741 (1997)
160) P.T. Coleridge *et al.* : *Phys. Rev.*, B**56**,R12764 (1997)
161) Y. Hanein *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **80**,1288 (1998)
162) M.Y. Simmons *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **80**,1292 (1998)
163) E. Ribeiro *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **82**,996 (1999)
164) D.L. Shepelyanski : *Phys. Rev. Lett.*, **73**,2607 (1994)
165) M. Imada : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**,2954 (1995)

プラズマによる粒子加速

小方　厚

1章 はじめに——プラズマ加速の概要

詳しい話に移る前に，まずプラズマ加速のおおよそを紹介したい[1,2]．高エネルギー物理学が要求する粒子エネルギーには限りがないようである[3]．現在では，長さ数十 km の加速器の建設が真剣に論議されている．しかしこのような巨大加速器は，建設費用のみならず，運転・保守などの面からもいろいろな問題をかかえている．そこで望まれるのが加速器の小型化である．小型化を実現するには，加速勾配を大きくすればよい．そして，ここで述べるプラズマ加速器の特徴は加速勾配が大きいことである．

現在実用化されている加速器の加速勾配の原理的な限界は 100 MeV/m 程度とされており，実際の加速勾配は 10 MeV/m 強である．プラズマ加速では現時点で，実験室ではすでに 300 GeV/m を超える加速勾配が実現している．加速勾配が 3 桁上がれば 1000 km の加速器が 1 km になり，1 km の加速器は 1 m になるはずである．

プラズマ加速ではプラズマ波という進行波の電場を用いる．電場勾配があれば，正(負)の電荷をもつ粒子は電場が減少(増加)する方向に行く．この方向が前方であれば粒子は加速される．電場を与える波自体が粒子と同じ速度をもっていれば，加速はいつまでも続く．E(V/m) の電場は E(eV/m) の加速勾配を与える．この点では現在の加速器で用いられている高周波電磁波による加速(いわゆる rf 加速)となんら変わるところがない．

ただしここでは，プラズマというはじめから電離した気体が加速電場を保持するのが特徴である．加速管というハードウェアで電場を保持する限り，加速勾配を「加速管構造体の結合エネルギーを結合距離で割った値」より大きくすることができない．プラズマを使えばこの束縛から逃れることができる．ただしプラズマ加速の弱点は加速距離が短いことで，このためにエネルギー利得は

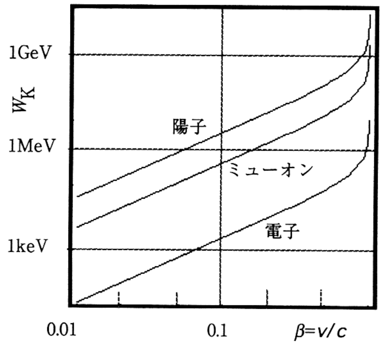


図 1.1　ビーム速度とビームの運動エネルギー

世界記録でも 100 MeV 台に止まっている．

この加速法ではプラズマは触媒のようなもので，実際に荷電粒子にエネルギーを与えるのはレーザーあるいは粒子ビームである．加速は 2 つの段階を踏む．

1. まずレーザーあるいは粒子ビームが電子の粗密波(電子波，プラズマ波)を作り，
2. 次にプラズマ波が荷電粒子を加速する．

加速に用いるためには，このプラズマ波の位相速度が，加速したいビームの速度にほぼ等しくなければならない．レーザーも粒子ビームも光速 c に近い位相速度をもつプラズマ波を作る．図 1.1 はビーム速度とビームの運動エネルギーの関係を示したものである．電子などの軽い荷電粒子は 1 MeV ですでに光速に達するが，陽子が光速に達するのは 1 GeV を越えてから，中間子は文字どおりこの中間である．レーザーによる加速法は，電子・陽電子に適用するときはテストバンチのエネルギーは低くてよい．一方，陽子，イオンは，エネルギーが小さいうちはこの波に同期しない．実用的見地からはこの加速法は陽子，イオンには適さないと言い切ってしまってもよい．プラズマ波による陽子加速に興味がある方は文献 4) を参照していただきたい．

レーザーは横波であるから，レーザーの電場で粒子をレーザーの進行方向に加速することは第 0 近似では不可能である．もしプラズマを使わず，レーザー

の電場を直接粒子加速に使えたとしたら，その電場はどの程度のものなのだろう．レーザーの電場は

$$E = 2\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\right)^{1/2} \tag{1.1}$$

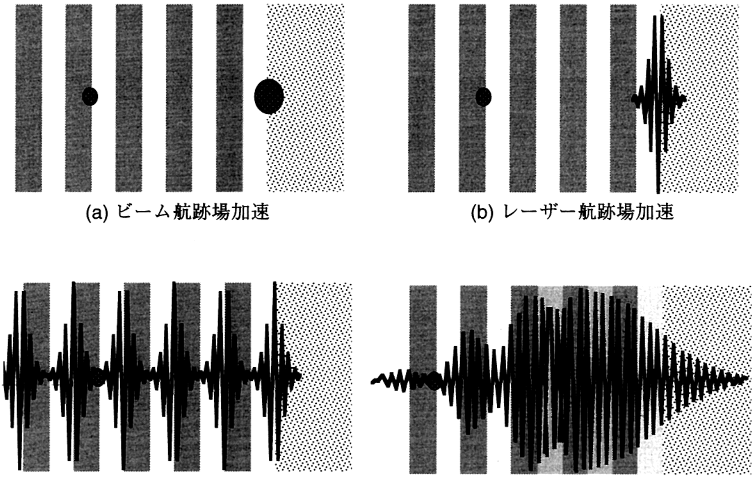
であって，例えばレーザーの電力密度が $\mathrm{d}P/\mathrm{d}s = 10^{18}\mathrm{W}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$ であれば 2.7 TeV/m の加速勾配が得られる．同じ電力密度のレーザーを航跡場加速に用いても（計算法は後で示すが，例えばレーザー波長 1μm，パルス幅 100 fs としてプラズマ密度を最適化しても）30 GeV/m 程度である．レーザーを直接用いれば 100 倍大きな加速勾配が得られるはずである．ただしここでつけ加えておきたいことがある．レーザーの電場はレーザーが消えれば消えてしまうが，プラズマ波はレーザーが消えても残り，まだまだ粒子を加速できることである．プラズマはエネルギーを蓄え，小出しにするという役目も果たすのである．

先ほどレーザー単独の加速は第 0 近似では不可能といった．しかしレーザービームの断面積は有限であるから，縦電場はゼロではない．これは導波管で縦電場が存在するのと同じことである．この電場を加速に使おうという提案がある[5)]．またレーザービームをクロスさせるとその場所に縦電場が生じるから，交差点の近傍は加速に使えそうである[6)]．レーザーの横電場を加速に使おうというアイデアもある．粒子ビームに無数のレーザービームを横切らせるというものである[7)]．

粒子ビームと磁場・中性ガスなどを組み合わせるとビームはエネルギーを失うがその代償として放射光が発生する．加速法に対するアプローチとしてこの逆過程を考えるものがある．放射光をレーザーで置き換え，磁場・中性ガスなどの存在のもとで粒子ビームにエネルギーを与えるという提案である．逆自由電子レーザー加速[8)]，逆チェレンコフ放射加速[9)]などがある．

さて，このレーザーによるプラズマ波の生成を粒子加速に結びつけて最初に提案したのが有名な文献 10) である．実際に加速をもたらすのは，プラズマ波に伴う電場である．この電場 E は，プラズマ中の電子のうちプラズマ波に寄与するものの割合を n_1/n_0 とすれば，およそ

$$E = \frac{n_1}{n_0}\frac{m_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}c}{e}$$



(a) ビーム航跡場加速　(b) レーザー航跡場加速

(c) ビート波加速　(d) 自己変調レーザー航跡場加速

図 1.2　プラズマ波の励起

である．$n_1/n_0 \ll 1$ のときプラズマ波は線形であるという．$n_1/n_0 = 1$ としてこの式を覚えやすい形で書けば

$$eE[\mathrm{eV/cm}] \sim n_0[\mathrm{cm}^{-3}]^{1/2}$$

となる．$10^{18}\mathrm{cm}^{-3}$ のプラズマを使えば GeV/cm の加速勾配が得られることになる．

プラズマはプラズマ振動数をパラメータとする振動系である．加速に用いるにはこの系に振動を励起しなければならない．図 1.2 に 4 つの励起法を模式的に示した．図で球は電子バンチ，実線はレーザー電場，バックの濃淡はプラズマ密度を表す．

プラズマ波による加速実験で最初に成功したのは，図 1.2(a) のプラズマ航跡場加速(ビーム航跡場加速，plasma wakefield acceleration；PWFA，PWA)であった[11)]．この方法はプラズマ波を荷電粒子ビーム(いままでの実験では電子バンチ)によって励起する[12)]．電子バンチ(ドライブバンチという)がプラズマに入ると，プラズマ中の電子はこれを嫌って逃げてしまう．この結果プラズマ中

に電子密度の小さい領域ができる．この領域に今度はプラズマ中の電子が押し寄せる．電子密度が大きくなると電子が逃げ出す．この繰り返しがプラズマ振動である．この間イオンは重くて動けない．励起されたプラズマ波の位相速度はドライブバンチの速度に等しい．ドライブバンチとして相対論的な電子ビームを使えば，波の位相速度は光速となる．1999年現在，この方法では1m長のプラズマで約30MeVのエネルギー利得を得られている[13)]．

レーザーの場合は，光の圧力が電子を押しのけることがプラズマ振動の引き金となる．この光圧力を動重力(ponderomotive force)という．動重力は光の電場を展開したとき2次の項から導かれる．レーザーのもつパラメータのひとつがプラズマ振動数に等しければ，レーザーによるプラズマ振動の励起は効率的であろう．レーザー自体の振動数 $\omega_L = 2\pi c/\lambda_L$（$\lambda_L$ はレーザー波長）はあまりに大きすぎる．プラズマ振動数がレーザー振動数に等しいような高密度プラズマにはレーザーは侵入できない．現実的なのは，レーザー波形をプラズマ振動数で変調すること，およびレーザーのパルス長をプラズマ波長 $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ 程度とすることの2つである．これらをそれぞれ図1.2(b)，(c)に示す．前者を実現するには，周波数の差が（すなわちビート周波数が）プラズマ周波数に等しい2つのレーザーを用いる．この方法をビート波加速（beat wave acceleration；PBWA，BWA）という．後者をレーザ航跡場加速(laser wakefield acceleration；LWFA，LWA）という．

LWAはチャープパルス増幅という技法が開発され，パルス長1ps以下，出力1TW以上のレーザーが出現して初めて現実的となった[14)]．それまでの実験の主流はBWAであった．BWAが比較的低出力のレーザーで繰り返しプラズマを刺激するのに対し，LWAは大出力レーザーに対するプラズマのパルス応答に頼る．BWAの実験結果はすでに日本の大阪大学レーザー核融合研究センターをはじめ米加仏で得られている[15,16)]．例えば，カナダでは12MeV程度の電子を30MeV程度まで加速し，GeV/m級の加速勾配を観察した．LWAでも，日本の実験で10MeV台の電子を200MeV以上にまで加速し，10GeV/m級の加速勾配を得た[17)]．

このようにレーザー加速の実験では，確かにGeV/mないし10GeV/m台の加速勾配が得られている．しかしエネルギー利得は100MeV台を出ていない．

これは加速距離が短いため，すなわちレーザーの焦点付近でしか大加速勾配が得られないためである．真空中，あるいは一様なプラズマ中では，パワー密度を上げようと，レーザースポットを小さく絞れば，焦点深度が浅くなり，パワー密度が大きい区間長が短くなる．言い換えれば，加速勾配を稼ごうとすると，加速長が短くなるというジレンマがある．レーザーを小さなスポットサイズを保って伝播させる技術が必要とされる．

ところで，光ファイバーではレーザーは一定な半径のまま伝搬する．ファイバーは中心の屈折率が大きく，周辺にいくに従い屈折率が小さくなるように作られている．光はここをジグザグに進み，ある半径の外に出ることがない．このような光導波路はプラズマを用いても実現できる．レーザーの屈折率はプラズマの密度に依存する．あらかじめレーザー軸に沿って，プラズマ密度の小さいチャネルを作っておけば，レーザーはこのチャネルの中を収束したまま伝播する．これを利用すれば加速距離はレイリー長を大きく越えると期待される．

この光導波路形成には主として 2 つの方法がある．第 1 は密度チャネルを，加速用のレーザーそのもので作る方法である．大出力レーザーの場ではプラズマ電子が横方向に相対論的に運動する結果，質量が大きくなり，プラズマ周波数は減少する．等価的にレーザーの進行軸上でプラズマが希薄化したことになり，相対論的光導波路が形成される．

第 2 の方法は加速用のレーザが通る前に，別なレーザーで加速用レーザーの導波路を用意する方法である．最大レイリー長の 70 倍まで，入射したレーザーのエネルギーの 75 %を伝播させた例がある[18)]．

LWA において相対論的光導波路を利用するには，レーザーのパルス幅を λ_p より長くしなければならない．これは先に，LWA におけるレーザーのパルス長はプラズマ波長程度とするのが最適としたことと矛盾する．そこでむしろ，相対論的光導波路現象が優先するように，プラズマ密度とレーザーのパルス長を選ぶのが，自己変調レーザー航跡場加速 (self-modulated laser wakefield acceleration) と呼ばれる方法である[19,20)]．図 1.2(d) にその概念を示した．高密度プラズマを使うことになるので加速勾配が大きい．この加速はレーザーの収束と，これに伴うプラズマ密度の変化が相互に影響しあう現象を利用する．

最初の自己変調レーザー航跡場加速の実験も日本で行われ，30 GeV/m の加

速勾配を得た[21]．より大出力のレーザーを用いた英国RALの実験では，最高100 MeVのエネルギーをもつ電子が観測された[22]．加速距離は300 μmなので，加速勾配は300 GeV/mを越える．このRALの実験はテストバンチを用いていない．観測にかかった高エネルギー電子はプラズマ波がプラズマ中の電子を捕獲，加速したもので，30 MeVの電子の電流は1A，エミッタンスは5 πmm mradと報告されている．さらにレーザースペクトルのプラズマ周波数による変調も観測された．

図1.3は従来の実験結果を，加速勾配を横軸，加速距離を縦軸とする平面にプロットした結果である．エネルギー利得は $-45°$ の傾きをもつ直線群で表される．プラズマ(ビーム)航跡場加速(PWA)，レーザー航跡場加速/ビート波加速(LWA/BWA)，自己変調レーザー航跡場加速(sm-LWA)がそれぞれの領域をもっている．このグラフで右上の方向に進みたいのであるが，レーザーを用いる方法には後で述べるように点線で示した限界がある．

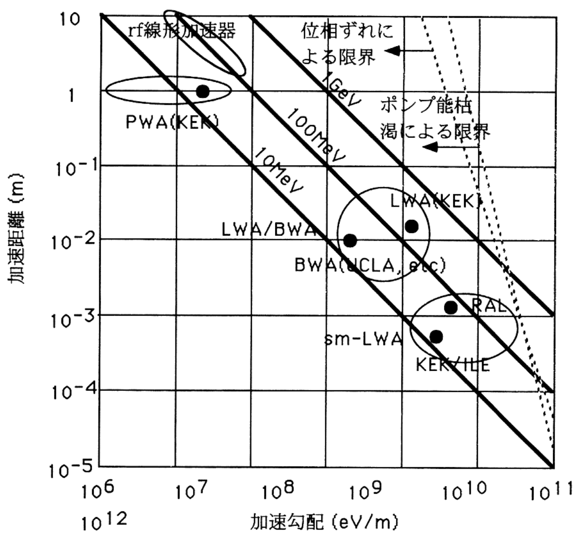


図 1.3 従来の実験結果を，加速勾配を横軸，加速距離を縦軸とする平面にプロットした結果．エネルギー利得は $-45°$ の傾きをもつ直線群で表される．点線は $\lambda_L = 1\mu$m, $a = 1, \sigma_z = \lambda_p/\pi$ を仮定したときの脱位相長とポンプ能枯渇長（KEK：高エネルギー加速器研究機構，UCLA：カリフォルニア大学ロスアンジェルス校，RAL：ラザフォードアップルトン研究所，ILE：大阪大学レーザー核融合研究センター）

さて，以下の章は「プラズマから荷電粒子ビームへ」,「荷電粒子ビームからプラズマへ」,「プラズマからレーザーへ」,「レーザーからプラズマへ」と題する4章から成り立っている．レーザー/プラズマ加速はレーザー・プラズマ・荷電粒子ビームの間の三角関係の研究である．しかしこの関係はレーザーとプラズマ，プラズマと荷電粒子ビームという2つの対立関係に分離できる(コンプトン散乱などはビーム・レーザー相互作用の好例だが本稿の領域外である)．A，B 2者の対立関係もAからBへと，BからAへという，2つの一方通行に分離して述べようというたくらみから，このような構成となった．図1.2にあげた加速法に対応した個所を示すと，プラズマ航跡場加速(ビーム航跡場加速PWA)だけは第3章に，他のビート波加速(BWA)，レーザー航跡場加速(LWA)，自己変調レーザー航跡場加速は第5章に記述されている．なおこれらのほかに直交場加速というわが国で独自の発展をみた加速法がある．実用的な見地からは直交場加速は上記方法のひとつのオプションであるというのが筆者の個人的な意見である．そこでこれについては第2章の最後で短く紹介するだけにとどめた．

2章 プラズマから荷電粒子ビームへ

図 1.2 に 4 つのプラズマ波の励起法を示したが，これらがそのまま 4 つのレーザー/プラズマ加速の方法とされている．励起法イコール加速法である．そしてプラズマ波ができた後の物理はおおむねこれら 4 つの方法に共通である．そこでまず，共通のことがらをこの章で済ませてしまうことにする．

2.1　プラズマ波

完全電離プラズマでは，プラズマはイオンと電子から構成されている．プラズマ波はプラズマ電子の粗密波であり，電子波，ラングミュア波とも呼ばれる．短い時間スケールで考えている限り，イオンの方は重たいので動かないとしてよい．どのようにプラズマ波を作るかという問題はあえてあとまわしにして，ここでまずプラズマ波の周波数と電場を導いてみる．x[V/m] の電場は x[eV/m] の加速勾配を与えることを銘記していただきたい．

n をプラズマ密度とする．出発点は連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0(\nabla \cdot v) = 0 \tag{2.1}$$

運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{eE}{m} \tag{2.2}$$

およびポアソンの式

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 E) = -en \tag{2.3}$$

である．ただし m は電子の質量である．

見通しをよくするために振動を 1 次元と考え，$n = n_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ とし，さらに $\partial/\partial t = -i\omega, \nabla\cdot = \partial/\partial x = ik$，$\omega/k = v_{\mathrm{p}}$ とおくと

$$kn_0 v - \omega n_0 = 0, \quad im\omega v - eE = 0, \quad ik\epsilon_0 E + en_0 = 0 \tag{2.4}$$

を得る．これらから

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} \tag{2.5}$$

および

$$\begin{aligned} eE &= im\omega v_{\mathrm{p}} \\ &= m\omega v_{\mathrm{p}} \exp\left[i\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る．

式 (2.5) で得られた角周波数をプラズマ振動数（本当は角周波数であるが振動数といっても通じるのがふつう）といい ω_{p} と書く．式 (2.6) はプラズマ波の電場である．密度の振動も電場の振動もプラズマ振動数をもつが，位相は互いに $\pi/2$ ずれていることに注意していただきたい．

$n = n_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ と仮定して出発したが，これでは密度が負になる時間帯も存在することになる．実際はプラズマ電子の全部がプラズマ波に寄与するわけではない．寄与する密度を n_1 とおけば

$$eE = \frac{n_1 m\omega_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}}{n_0} \tag{2.7}$$

が波の振幅となる．$n_1 = n_0$ のとき，波は破壊されると解釈する．さらに v_{p} のとりうる最大値は c である．そこで $n_1 = n_0$ のときに $m\omega_{\mathrm{p}}c/e$ がとる値を，波の破壊限界における波の電場という．実はここまでの取り扱いは相対論を考慮していないので，無造作に v_{p} を c とおいてはまずいのだが，慣例として破壊限界ということばが使われている．

$$\epsilon = \frac{eE}{m\omega_{\mathrm{p}} c} \tag{2.8}$$

とおけば，これは最大電場（破壊限界電場）に対する実際の電場の割合を示す．$\epsilon = n_1/n_0$ であるから，この割合はプラズマ電子のうち振動に関与するものの割合に等しい．そして変数に exp 依存性を仮定したことは暗黙に $\epsilon \ll 1$ を仮定していることにほかならない．繰り返すが，ここまでの扱いは 1 次元・線形・非相対論的といわれるものである．

図 2.1 はプラズマ波と，この波で加速されるはずの荷電粒子を示している．右の図から多少時間がたつと左の図のようになる．

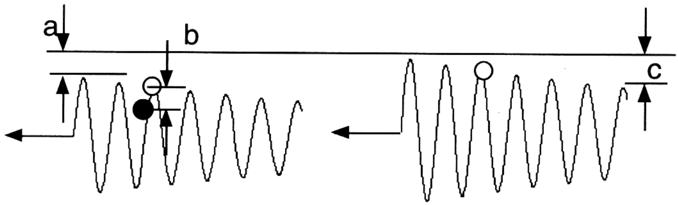


図 2.1　プラズマ波の進行と荷電粒子．a：ポンプ能力の減衰，b：位相のずれ，c：プラズマ波の減衰

まず，ある程度進行すると波の先頭の振幅は a で示すように減少する．これはプラズマ波を作っている（ポンプする）レーザーなり粒子ビームなりが，プラズマ波を作るためにエネルギーを失い，しだいに能力を失うからである．この現象を定量化するためにポンプ能枯渇長（pump depletion length）というパラメータを導入し L_{pump} で表す．初期の加速勾配を E_{zi} とすれば，距離 z 進んだ後の勾配は

$$E_z = E_{zi} \exp\left[-\frac{z}{L_{\mathrm{pump}}}\right] \tag{2.9}$$

に減少する．

また波の位相速度 v_{p} が c より小さく，加速された粒子が v_{p} より大きな速度をもつ場合は，粒子と波の位相関係にずれが生じる．すなわち図 2.1 の右側で白丸の位置にあった粒子が左の図では相対的に黒丸の位置に進むことになる．加速電場は実質的に b だけ減少する．この現象についても節を改めて説明する．

図 2.1 の c に示すように，プラズマ波そのものも減衰する．この減衰が著しいときは，加速によってエネルギーがそろったマルチバンチを得ることができない．減衰要因として少なくとも 3 つの仮定を挙げることができる．衝突減衰（collisional damping），変調減衰（modulational damping），ランダウ減衰（Landau damping）である．

ランダウ減衰はプラズマ電子の速度がプラズマ波の位相速度に近づいたときに見られる現象である．第 5 章で，外からテストバンチを供給せず，プラズマ電子を捕獲してビームを生成しようというアイデアを紹介するが，このときはこの減衰について考慮する必要がある．見方を変えれば，ビーム負荷，すなわちビームを加速するがためのプラズマ波の減衰は一般化されたランダウ減衰と

いえる．これについては章を改めて述べる．

変調減衰はプラズマイオンの運動によりプラズマ波が変調される現象である．レーザー/プラズマ加速の分野ではイオンの運動を無視して取り扱うことが多いが，この近似の限界を示すものである[23]．

衝突減衰はビート波加速で生じるプラズマ波の振幅の飽和現象に対する興味から研究されてきた[24]．この減衰定数は，プラズマ物理の教科書［例えば文献25)］に与えられている．ただしプラズマ電子が強電場下で相対論的に運動すると，質量が増加する結果動きが鈍くなり，衝突周波数が減少するといわれる．これを考慮すると，プラズマ波の減衰に対する衝突の寄与は変調の寄与に比べてはるかに小さいことになる．

2.2　波による荷電粒子の捕捉

荷電粒子は波からエネルギーを得たり（加速されたり），失ったり（減速されたり）する．これは粒子の速度，波の位相速度，波の電場，そして粒子が初めに波のどの位相に乗るかによって決まる．

加速機構だけがあっても加速器はできない．加速されるべき粒子（テスト粒子）を供給しなければならない．テスト粒子がプラズマ波に乗れる，あるいは波に捕捉されうるためには，粒子と波の速度が同じくらいでなければならないと想像できる．ここではこの問題を考える．

図 2.2 がこの問題に対する解答である．ここでは $\epsilon = eE/(m_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}c)$ と波の位相速度 β_p を与えられたときに，電子がこの波に捕捉されるためにはどのようなエネルギー範囲にあるべきかを描いたものである[26]．図では電子のエネルギーを $\gamma = 1/[1-\beta_\mathrm{p}^2]^{1/2}$ で表し，γ がとりうる最大値 γ_+ と最小値 γ_- を示した．以下「$'$」によりプラズマ波の系を表す．捕捉されるべき粒子の質量を m_p とする．捕捉が可能なためには波のポテンシャルが粒子の運動エネルギーより大きくなければならないから

$$(\gamma' - 1)m_\mathrm{p}c^2 \leq e\phi' \tag{2.10}$$

この条件を満たす粒子のうち，エネルギー最大のものの全エネルギーは

$$W' = \gamma' m_\mathrm{p}c^2 = e\phi' + m_\mathrm{p}c^2 \tag{2.11}$$

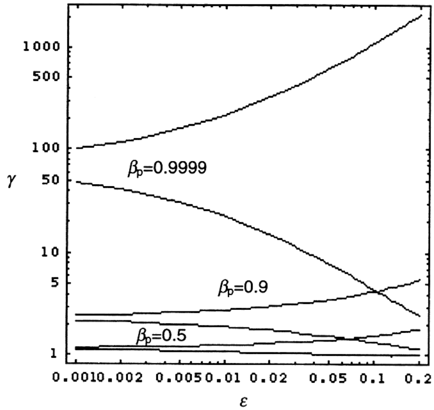


図 2.2　3 つの $\beta_{\rm p}$ 値における，捕捉エネルギーと加速上限エネルギーの $\epsilon = eE/(m_{\rm e}\omega_{\rm p}c)$ への依存性

である．ただしエネルギーは同じであっても，速度は方向により $+\beta'$，$-\beta'$ の 2 つの値をとりうる．したがって，実験室系ではこのエネルギーは

$$W_\pm = m_{\rm p}c^2\gamma_{\rm p}\gamma'(1 \pm \beta_{\rm p}\beta') \tag{2.12}$$

となり，複号に応じて 2 つの値になる．これらは捕捉されるための最小エネルギーと最大エネルギーを与える．一方

$$eE = ek'\phi' = ek\phi, \quad eE = m_{\rm e}v_{\rm p}\omega_{\rm p}\epsilon, \quad v_{\rm p}k = \omega_{\rm p} \tag{2.13}$$

および

$$k = \gamma_{\rm p}k' \tag{2.14}$$

を用いると

$$\gamma' = \frac{m_{\rm e}}{m_{\rm p}}\gamma_{\rm p}\beta_{\rm p}^2\epsilon + 1 \tag{2.15}$$

を得る．γ' とこれを用いて $\beta' = \left(1 - 1/\gamma'^2\right)^{1/2}$ より導かれる β' を式 (2.12) に代入する．粒子が電子 $(m_{\rm p} = m_{\rm e})$ の場合の結果は

$$\gamma_\pm = \gamma_{\rm p}(\gamma_{\rm p}\epsilon + 1)\left[1 \pm \beta_{\rm p}\left(1 - \frac{1}{(1+\gamma_{\rm p}\epsilon)^2}\right)^{1/2}\right] \tag{2.16}$$

となる.

この図 2.2 は，プラズマ波が最小エネルギー γ_- より大きいエネルギーをもつ電子を捕捉して，最大エネルギー γ_+ にまで加速することができることを示している. ϵ が 1 に近ければかなり低速の電子でも波に捕捉されることがわかる.ここではプラズマの温度は無視している．しかし実際のプラズマは有限の温度をもつ．言い換えれば，プラズマ電子のうちには 1 よりもかなり大きな γ をもつものもある．プラズマ波はこうしたプラズマ電子を捕捉し，条件によってはこれから高エネルギービームを作ることもありうる.

2.3　位相のずれ

レーザーで作るプラズマ波の位相速度はプラズマ中のレーザーの群速度であり，後の章で詳しく述べるように

$$\frac{v_\mathrm{p}}{c} = \left[1 - \left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega_\mathrm{L}}\right)^2\right]^{1/2}$$

であって，光速 c より小さい．レーザーを用いたければ，テスト粒子が波を追い越して波の減速位相に乗ることになる前に加速をやめなければならない．この結果，加速距離は有限となる．ここでは加速距離の観点から位相のずれを見直してみよう.

プラズマ波の振幅は $\cos(\omega_\mathrm{p} t - k_\mathrm{p} z)$ に比例する．テスト粒子は光速であるとすれば，その座標は $z = ct$ である．テスト粒子が乗る波の位相は

$$\omega_\mathrm{p} t - k_\mathrm{p} z = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v_\mathrm{p}}\right)\omega_\mathrm{p} z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega_\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\omega_\mathrm{p} z}{c}$$

であるから，この粒子が感じる加速勾配は

$$E_{z\mathrm{eff}}(z) = E_z \cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{\omega_\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\omega_\mathrm{p} z}{c}\right] = E_z \cos\left[\left(\frac{\lambda_\mathrm{L}}{\lambda_\mathrm{p}}\right)^2 \frac{\pi z}{\lambda_\mathrm{p}}\right] \qquad (2.17)$$

である．この加速勾配は，位相が $(\lambda_\mathrm{L}/\lambda_\mathrm{p})^2(\pi z/\lambda_\mathrm{p}) = \pi/2$ のときにゼロになる．この関係から脱位相長(dephasing length)を次のように定義する.

$$L_\mathrm{dphs} = \frac{\lambda_\mathrm{p}}{2}\left(\frac{\lambda_\mathrm{p}}{\lambda_\mathrm{L}}\right)^2 \qquad (2.18)$$

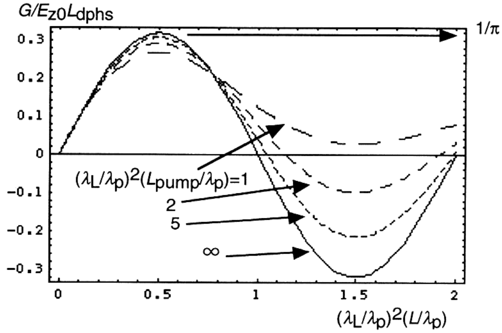


図 2.3　レーザー航跡場加速におけるエネルギー利得とテスト粒子走行距離．パラメータ L_{pump} はレーザーがエネルギーを失い航跡場を励起できなくなる距離（ポンプ能枯渇長；pump depletion length）

なお，粒子が脱位相するまでに感じる平均電場は，最大電場の $2/\pi$ である．

レーザー航跡場加速を仮定したときのエネルギー利得のテスト粒子走行距離への依存性を図 2.3 に示した．パラメータ L_{pump} は図 2.1 に関連して示したポンプ能枯渇長である．ポンプ能枯渇長が十分大きければ，エネルギー利得は脱位相長において最大である．

2.4　相対論的プラズマ波

いままでの議論でも，控えめに相対論的な扱いを交えてきたが，アキーザー (Akhiezer)[27,29] はプラズマ波の位相速度が光速 c に近い場合を解析的に扱っている．計算は複雑なので結果だけを示すと，

電子の速度 β が相対論的な領域にある波の位相速度 β_{p} に近づくにつれ

1) プラズマ周波数が小さくなり，

2) 密度揺動波形はインパルスに近づき，

3) 電場の波形は鋸歯状波に近づく．

これらを図 2.4~2.6 に示した[28]．また波の最大電場は

$$eE = m_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{p}}c[2(\gamma_{\mathrm{p}}-1)]^{1/2} \tag{2.19}$$

（ただし $\gamma_{\mathrm{p}} = 1/(1-\beta_{\mathrm{p}}^2)^{1/2}$）となり，非相対論的な波の破壊限界 $m_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}$ よりかなり大きくなる．

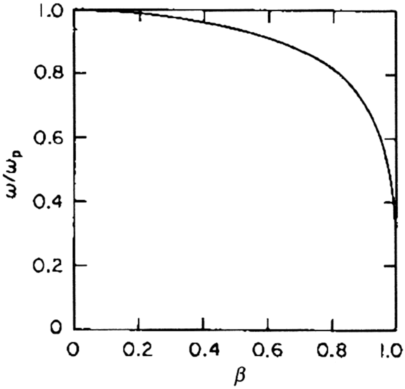


図 2.4　$\omega/\omega_{\rm p}$ の β 依存性[28)]

なお振幅の小さい領域では，これらの図におけるように n および E の波形の正弦波からのずれが顕著でないこと，別な言い方をすれば波動は線形とみなせることをつけ加えておく．

2.5　直交場加速（サーファトロン）

プラズマ波が存在する場に縦磁場をかけると，荷電粒子はプラズマ波といっしょに走りながら，波の方向にも磁場の方向にも垂直な第3の方向に加速される．粒子は波のポテンシャルの壁に押しつけられるので，位相のずれによって

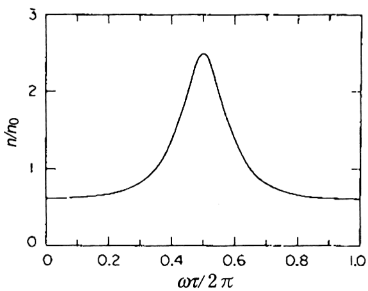


図 2.5　正規化したプラズマ密度 n/n_0 の進行方向位相 $\omega\tau/2\pi$ への依存性．$\beta=0.6$[28)]

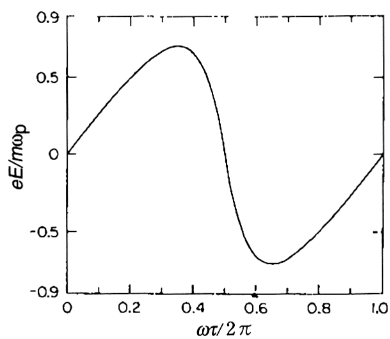


図 2.6　正規化した電場 $eE/m_{\rm e}\omega_{\rm p}c$ の進行方向位相 $\omega\tau/2\pi$ への依存性．$\beta=0.6$[28)]

加速長が制限されることがない．この方法は日米で独立に提唱された．最初の2つの論文[30)]では非相対論的な取り扱いが行われたが，その後文献31)が相対論的な扱いを加えた．加速のようすがサーフィンに似ているのでサーファトロン(surfatron)と呼ばれる．また後には，電磁波(横波でもよい)と静磁場が存在すれば，プラズマを用いなくとも粒子加速は可能であることが示された．この広義のサーファトロン加速は，直交場加速(cross field acceleration)，あるいは $v_\mathrm{p}\times B$ 加速と呼ばれる．

図 2.7 のように座標を定める．テスト粒子として電子を想定すると，その運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma V_x)}{\mathrm{d}t}=\frac{eE_0}{m_\mathrm{e}}\sin(kx-\omega t)+\omega_\mathrm{c}V_y \tag{2.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma V_y)}{\mathrm{d}t}=-\omega_\mathrm{c}V_x \tag{2.21}$$

$$\gamma=\left(1-\frac{V_x^2}{c^2}-\frac{V_y^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{2.22}$$

である．ただし $\omega_\mathrm{c}=eB/m_\mathrm{e}$ はサイクロトロン周波数である．

荷電粒子に働く x 方向の力は波の座標で

$$F_x=e(E_0\sin kx'+\gamma_\mathrm{p}V_{y'}B) \tag{2.23}$$

である．右辺第1項のローレンツ力は捕捉，第2項は捕捉から逃れようとする効果を表す．したがって

$$\gamma_\mathrm{p}cB<E_0 \tag{2.24}$$

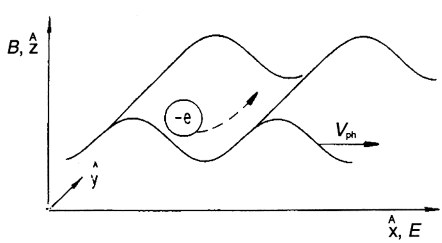


図 2.7　サーファトロン[31)]

でなければならない．このとき

$$V_x = V_\mathrm{p} \tag{2.25}$$

である．式 (2.21) を適当に変形すると

$$V_y = \frac{-\omega_\mathrm{c} V_\mathrm{p} t}{\gamma_\mathrm{p}[1 + \omega_\mathrm{c}^2 t^2 V_\mathrm{p}^2 / c^2]^{1/2}} \tag{2.26}$$

を得る．この 2 つの式を式 (2.22) と組み合わせてエネルギーを求める．エネルギーは走行距離 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ とともに無限に増加する．

この直交場加速は日本で独自の発展を遂げた．まずサーファトロンの原理が正しいことは宇都宮大学のグループにより実験的に証明された[32]．次にサーファトロンは縦波を使うが，真空中での横波と静磁場の組み合わせでも，粒子を波の磁場と静磁場が作る「磁気中性点」に捕獲し，波面に沿って無限に加速できることが理論的・実験的[33]に示された．詳しくはこの方法を探求してきた研究者の日本語の解説をお読みいただきたい[34]．

航跡場加速，ビート波加速に縦磁場を与えれば式 (2.26) によって与えられるだけのエネルギーを追加することができる．私見では，これが電子加速におけるサーファトロンの特徴である．例えば 10 MeV のドライブバンチによるビーム航跡場加速で，密度 $10^{16}\mathrm{cm}^{-3}$ のプラズマを用い，1 m の加速長で 1 GeV のエネルギーを得ているものとしよう．加速勾配は 1 GeV/m である．このとき加えうる最大磁場は式 (2.24) より 0.16 T である．x=1 m とすれば式 (2.26) の第 2 式よりエネルギー利得は $\Delta\gamma = 1966 \sim 500\,\mathrm{MeV}$ である．0.16 T で 500 MeV のエネルギーがおまけについてくるというのはずいぶんうまい話である．しかし喜ぶ前に y 方向への粒子軌道のずれを当たる必要がある．これは式 (2.26) の第 1 式より約 5 cm となる．

位相のずれと無縁で「無限加速」が可能なことが直交場加速の最大のセールスポイントだが，これは 2 次元的に無限に続く波が存在すれば ... という仮定の下の話である．上の電子加速の例でも縦 1 m 横 5 cm の波が必要である．この直交場加速による陽子・イオンの加速も可能といわれているが，この場合はまずテストビームと同じ位相速度の波が必要となる．次にこの波で直交場加速を行うと主として加速は（実験室系でも）横方向に起こり，縦よりも横の寸法が大きい波が必要になる．

3章 荷電粒子ビームからプラズマへ

ここまでの記述によれば，とにかくプラズマ波があれば，そこに荷電粒子を捕捉させればよいということになる．ではプラズマ波を作るにはどうすればよいか．式 (2.1)~(2.3) にもどってみよう．この式が示すことは，プラズマは ω_{p} を固有振動数にもつ振動系であるということだ．もともと振動したがっている系だから，外からそれなりの刺激を与えれば喜んで振動してくれる．最初に述べたように，刺激として，インパルス的な荷電粒子ビーム (バンチ) あるいはレーザーパルスを使うことができる．またプラズマ周波数と同じ周波数をもつ外力を使うこと，すなわち強制振動を行わせることもできる．ここではビームによるプラズマ波の励起から話を始める．ビームによるプラズマ波の励起と，プラズマ波によるビームの加速とは裏腹の関係にあるので，前者を調べることにより自然と後者も見えてくるはずである．

加速器の分野では，粒子ビームが通った後に残す電場を wakefield というが，これに「航跡場」という日本語を当てることにする．あまりなじみのある言葉ではないが，英和の辞書で wake を引くと，例外なく航跡という訳語に出くわす．船が通った後に水面にできる波のことだそうである．この航跡場により荷電粒子を加速することができる．

航跡場を，加速されるべき粒子群に伝える媒体としては，ここに述べるプラズマばかりではなく，誘電体管や周期構造をもった金属管等も考えられる．実は真空中でのビーム航跡場による加速研究にはそれなりの歴史があり，プラズマ航跡場加速は真空航跡場加速の研究で蓄積された結果に負うところ大である[35)]．誘電体管や金属管における航跡場では境界条件を満足する無数のモードがある．これに対しプラズマにおいては，後で述べるようにモードがプラズマ周波数，すなわちプラズマ密度で1つに決まってしまい，効率がよい．これがプラズマの

優れた点である．プラズマを媒体とする航跡場加速器をプラズマ航跡場加速器という．

先に粒子ビームが航跡場を作るといったばかりだが，レーザーが通った後にプラズマ中に残る電場も航跡場とみなせ，加速に使える．慣例的にビームによるもの，レーザーによるものをそれぞれプラズマ航跡場加速，レーザー航跡場加速という．しかしどちらもプラズマを媒体とすることに変わりがないので，最近ではビーム励起(beam-driven)プラズマ航跡場加速，レーザー励起(laser-driven)プラズマ航跡場加速ということも多い．ここではビーム航跡場加速，レーザー航跡場加速という言葉を使う．なお，航跡場という言葉にこだわるなら，逆チェレンコフ放射加速はレーザー(一般的にいうなら電磁波)が(プラズマを含む)誘電体中に作る航跡場を利用する加速器とみなすこともできる．

ビーム航跡場加速では，航跡場を作るビームが必要である．このビームをドライブビームという．加速されるべきビームはドライブビームを後から追いかける．これをテストビームという．多くの場合どちらもバンチ化されているので，ドライブバンチ，テストバンチと呼ぶこともある．ここではバンチという言葉をつけて使う．ビーム航跡場加速の実験装置の一例を図 3.1 に示す[36)]．こ

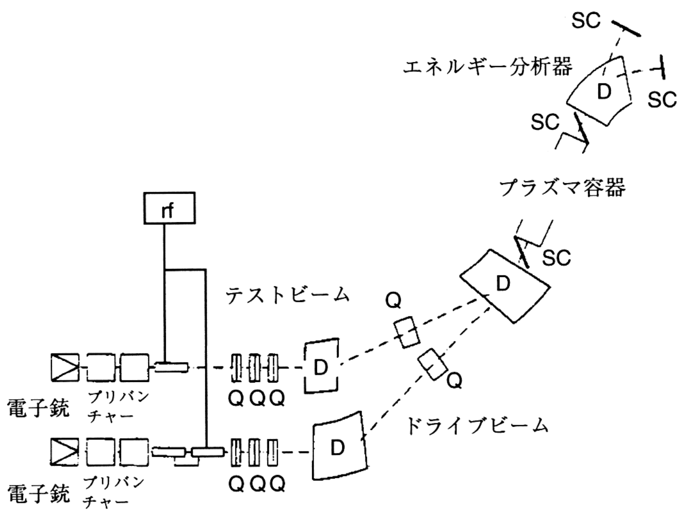


図 3.1　ビーム航跡場加速の実験装置．Q：四重極磁石，D：偏向電磁石，SC：スクリーンモニター[36)]

のように標準的にはドライブバンチ用とテストバンチ用に 2 本のビームラインをもつ線形加速器系が必要である.

3.1　ビームによるプラズマ波の励起

A. 1 次元プラズマ波

密度 n_{b} のドライブバンチによるプラズマ振動を導くために, 再び式 (2.1)〜(2.3) から出発する. 3 つの式を波の進行方向にとった x 軸にそって 1 次元化する.

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -n_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{eE}{m_{\mathrm{e}}}, \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = -e(n_1 + n_{\mathrm{b}}) \tag{3.1}$$

第 3 式の右辺は, 式 (2.3) と異なり, ドライブバンチの項 n_{b} を含むことに注意していただきたい.

ここまでは位相速度を v_{p} と書いてきたが, これ以後ドライブバンチは相対論的電子からなるものとしよう. するとドライブバンチが作るプラズマ波の位相速度は光速なので, $v_{\mathrm{p}} = c$ と書く. 位相速度 c で動く座標に乗ることにし, これらの式を変数 $\xi = x - ct$ を用いて表す:

$$-c\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\xi} = -n_0 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}, \quad c\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = \frac{eE}{m_{\mathrm{e}}}, \quad \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\xi} = -e(n_1 + n_{\mathrm{b}}) \tag{3.2}$$

これらからたやすく 2 つの式

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}\xi^2} + k_{\mathrm{p}}^2 E = -\frac{e}{\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}n_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\xi} \tag{3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 n_1}{\mathrm{d}\xi^2} + k_{\mathrm{p}}^2 n_1 = -k_{\mathrm{p}}^2 n_{\mathrm{b}} \tag{3.4}$$

を得る. ただし $k_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}}/c$ はプラズマ波の波数である.

ここから先に進むためには n_{b} の波形を仮定する必要がある. ここでインパルス状のバンチ

$$n_{\mathrm{b}} = \sigma\delta(x - ct) = \sigma\delta(\xi) \tag{3.5}$$

を考えてみよう. 1 次元で考えているのだが, σ は単位断面積あたりの電子数とみなす. $\delta(x)$ はデイラックのデルタ関数である. 式 (3.3)〜(3.4) より

$$n_1(\xi) = \begin{cases} k_{\mathrm{p}}\sigma \sin(k_{\mathrm{p}}\xi) & (\xi < 0) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \tag{3.6}$$

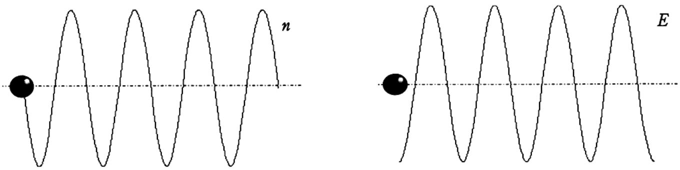


図 3.2　インパルス状のバンチによる密度揺動（左）と航跡場（右）

$$E(\xi) = \begin{cases} -e\sigma\cos(k_\mathrm{p}\xi)/\epsilon_0 \quad (\xi < 0) \\ 0 \quad (\xi > 0) \end{cases} \tag{3.7}$$

となる．最大値は $e\sigma/\epsilon_0$ である．インパルス状のバンチによる密度揺動と航跡場を図 3.2 に示した．単純な図であるが，頭の片隅にイメージとして焼き付けておくと，後の理解が容易になる．

進行方向の分布を計算に入れるのは比較的簡単である．単位断面積あたりの電子数が 1 個のとき ($\sigma = 1$ のとき) 上述のデルタ関数的なバンチが作る航跡場を $G(\xi)$ とすれば，密度 $n_\mathrm{b}(z)$ をもつバンチの作る航跡場はたたみこみ積分

$$E(\xi) = -\int_\xi^\infty n_\mathrm{b}(z)G(\xi - z)\mathrm{d}z \tag{3.8}$$

となる．

簡単な例として，$n_\mathrm{b}(z)$ が一定な場合，すなわち直流ビームの場合は

$$E(\xi) = \frac{en_\mathrm{b}}{\epsilon_0 k_\mathrm{p}}\sin k_\mathrm{p}\xi \tag{3.9}$$

である．これはバンチ（ビーム）の内部にも航跡場が存在していることを示している．なお，この式の sin の係数を変形すると

$$\frac{en_\mathrm{b}}{\epsilon_0 k_\mathrm{p}} = \frac{m_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}c}{e}\frac{n_\mathrm{b}}{n_\mathrm{p}} \tag{3.10}$$

となる．$E = m_\mathrm{e}\omega_\mathrm{p}c/e$ は，波の破壊限界といわれる電場である．一方，$n_\mathrm{b}/n_\mathrm{p} \ll 1$ はプラズマ中の電子のうち波に関与するものの割合を示している．プラズマ航跡場の実体はビーム内の電子密度に相当する程度の密度変動なのである．なお，振動を表すに際し，電場 E の代わりにスカラーポテンシャル ϕ もしばしば用いられる．ここまでの記述に限れば，ポテンシャルで記述するには $E = -k_\mathrm{p}\phi$ と置き換えればよい．

B．2 次元プラズマ波

実際のプラズマ波は半径方向にも伝わる．進行方向の波に伴う電場は位相により荷電粒子を加速させたり減速させたりする．これに対し半径方向の波に伴う電場は位相により荷電粒子を収束させたり発散させたりする．ここでは円筒座標 (r, θ, z) を用いる．ただし θ 方向の依存性は無視する．表題を 3 次元ではなく 2 次元としたのはこのためである．

進行方向には大きさがなく，半径方向には分布をもつバンチを，デルタ関数を用いて次のように表す．

$$n_{\rm b} = \sigma(r)\delta(\xi) \tag{3.11}$$

先の式 (3.4) を形式的に解けば，ビームが起こす密度揺動として

$$\begin{aligned} n_1(r) &= -k_{\rm p}\sigma(r)\sin k_{\rm p}\xi \quad (\xi > 0) \\ &= 0 \quad (\xi < 0) \end{aligned} \tag{3.12}$$

を得る．n_1 の r 分布は $n_{\rm b}$ の分布と同じである．しかし以下に示すように，電場分布はもっと複雑である．

ポテンシャル ϕ を用いると，ビームが過ぎ去った後の状態はポアソンの式 (2.3) により

$$\nabla^2\phi = en_1/\epsilon_0 \tag{3.13}$$

と表せる．ただし

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\phi\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{3.14}$$

である．

$\sigma(r)$ にパラボラ分布を仮定してみよう．

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \frac{2N}{\pi w^2}\left(1 - \frac{r^2}{w^2}\right) \quad (r < w) \\ &= 0 \quad (r > w) \end{aligned} \tag{3.15}$$

ただし，N はバンチがもつ電子数である．すると，ポテンシャルは

$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{16eN}{\epsilon_0 k_{\rm p} w^2}\left(K_2(k_{\rm p}w)I_0(k_{\rm p}r) + \frac{1}{2} - \frac{2}{(k_{\rm p}w)^2} - \frac{r^2}{2w^2}\right) \quad (r < w) \\ &= \frac{16eN}{\epsilon_0 k_{\rm p} w^2} I_2(k_{\rm p}w)K_0(k_{\rm p}r) \quad (r > w) \end{aligned} \tag{3.16}$$

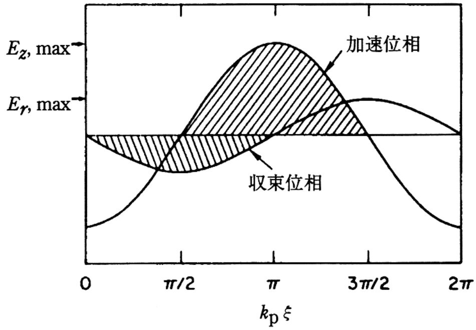


図 3.3　進行方向および半径方向の航跡場の位相[37)]

を用いて

$$\phi = R(r)\sin k_{\rm p}\xi$$

と表される.

電場は $E = -\nabla\phi$ より得られる. とくに $r < w$ では

$$E_z = -k_{\rm p}R(r)\cos k_{\rm p}\xi \tag{3.17}$$

$$E_r = -\frac{16eN}{\epsilon_0 w^2}\left(K_2(k_{\rm p}w)I_1(k_{\rm p}r) - \frac{r}{k_{\rm p}w^2}\right)\sin k_{\rm p}\xi \tag{3.18}$$

である.

ここで注意すべきことが2つある. 第1は, E_z と E_r の電場の ξ 依存性がcosとsinで表され, 図3.3に示すように $\pi/2$ ずれることである. 電場の符号の正負は進行方向航跡場の場合は加速・減速に, 半径方向航跡場の場合は収束・発散に対応する. テスト電子が発散されることなく加速される区間は進行方向の位相 2π のうち $\pi/2$ 区間にしかすぎない.

一般に進行方向航跡場の半径方向微分と半径方向航跡場の進行方向微分との間には

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = \nabla E_z \tag{3.19}$$

の関係がある. この関係は航跡場一般に成り立つもので[38)], パノフスキー・ウェンツェル(Panofsky-Wenzel)の定理という.

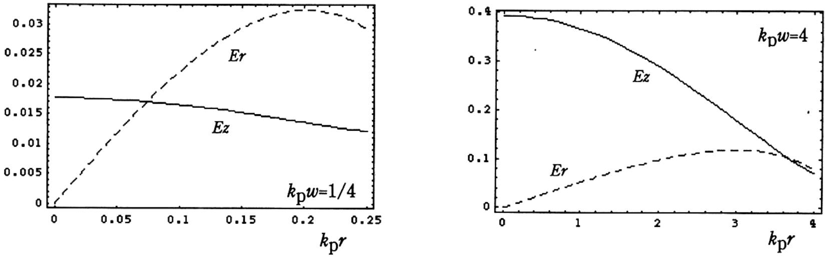


図 3.4　進行方向および半径方向の航跡場の大きさの比較．左は $k_\mathrm{p}w = 1/4$ の場合．右は $k_\mathrm{p}w = 4$ の場合

第 2 は進行方向電場と横方向電場の大きさの比較である．式 (3.17～3.18) より E_z, E_r の最大値は

$$E_{z0} = -\frac{16eN}{\epsilon_0 w^2}\left(K_2(k_\mathrm{p}w)I_0(k_\mathrm{p}r) + \frac{1}{2} - \frac{2}{(k_\mathrm{p}w)^2} - \frac{r^2}{2w^2}\right) \qquad (3.20)$$

および

$$E_{r0} = -\frac{16eN}{\epsilon_0 w^2}\left(K_2(k_\mathrm{p}w)I_1(k_\mathrm{p}r) - \frac{r}{k_\mathrm{p}w^2}\right)$$

と書ける．図 3.4 は $E_{z0}\epsilon_0 w^2/(16\,eN)$ と $E_{r0}\epsilon_0 w^2/(16\,eN)$ を $k_\mathrm{p}w = 4$ すなわちドライブバンチ径がプラズマ波長より大きい場合と，$k_\mathrm{p}w = 1/4$ すなわちドライブバンチ径がプラズマ波長より小さい場合について比較したものである．これから，ドライブバンチ径がプラズマ波長より大きい場合は進行方向電場が大きく，逆にドライブバンチ径がプラズマ波長より小さい場合は横方向電場が大きいことが理解できよう．レーザー航跡場加速の場合のレーザーのスポット径とプラズマ波長との大小関係も同じ結果をもたらす．すなわちレーザーのスポット径がプラズマ波長より大きい場合は進行方向電場が大きく，逆にスポット径がプラズマ波長より小さい場合は横方向電場が大きい．

バンチ内の電子分布により現実的なものを仮定したときの計算結果は文献 39) を参照していただきたい．

3.2　トランス比

議論を単純にするためにもう一度 1 次元のプラズマ波の場合にたちかえろう．幅 d の矩形状の密度分布をもつバンチを考えてみよう．$0 \le \xi \le d$ では

$n_b(\xi) = n_{b0}$，これ以外の領域で $V = 0$ とする．ただし考察を簡単にするために $k_p d = 2\pi N$ （N は整数）としておく．このバンチによる航跡場は

$$E(\xi) = \frac{en_b}{\epsilon_0 k_p}[\sin k_p(d-\xi) + \sin k_p \xi] \quad (\xi > d)$$
$$= \frac{en_b}{\epsilon_0 k_p} \sin k_p \xi \quad (\xi < d) \tag{3.21}$$

である．

バンチが過ぎ去った後に残る加速方向の最大電場は $E_+ = 2en_b/\epsilon_0 k_p$ である．一方，バンチの中の電子は常に自らのエネルギーを失う方向の符号をもつ航跡場をつくっている．この減速方向の航跡場(retarding field)の絶対値の最大値は $E_- = en_b/(\epsilon_0 k_p)$ である．これらの比

$$R = E_+/E_- \tag{3.22}$$

をトランス比(transformer ratio)という．矩形分布をもつドライブバンチではトランス比は 2 である．実はもっと一般的に，進行方向に対称な分布をもつドライブバンチではトランス比は 2 になることがいえる．

もっと違った角度からトランス比について考えてみよう．いままでは航跡場を電場としてとらえてきたが，加速器の分野では航跡場をバンチ電荷で正規化して表すのが慣例である．ここでもしばらく(この節の終わりまで)この慣例に従い，$w = E/q$ を航跡場とする．

さて $w(z)$ を用いると，N_d 個の電子をもつエネルギー W_d のドライブバンチが単位長さ走った後のエネルギー変化は

$$\frac{\mathrm{d}(N_d W_d)}{\mathrm{d}z} = -q_d^2 w(0) \tag{3.23}$$

である．一方，この z だけうしろにあるテスト電子のエネルギー変化は

$$\frac{\mathrm{d}(N_t W_t)}{\mathrm{d}z} = -q_t^2 w(0) + q_d q_t w(z) \tag{3.24}$$

である．右辺第 1 項はテスト電子がうしろに航跡場を残すためのエネルギー損失，第 2 項はドライブ電子が残した航跡場から受け取るエネルギーである．エネルギーが保存するために

$$\frac{\mathrm{d}W_d}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}z} \le 0$$

すなわち

$$(q_d^2 + q_T^2)w(0) \geq q_t q_d w(z)$$

でなければならない．これが q_t, q_d にかかわらず成り立つためには

$$w(z) \leq 2w(0) \tag{3.25}$$

でなければならない．この関係をビーム負荷の基礎原理という[40]．比 $w(z)/w(0)$ の最大値をトランス比 R と考えれば，$R = 2$ である．

式 (3.24) に，$q_t = eN_t, q_d = eN_d$ を用いると，1 個のテスト電子が単位長さを走ったときに得るエネルギーは

$$\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}z} \leq (2N_d - N_t)e^2 w(0) \tag{3.26}$$

で制限される．一方，ドライブバンチはプラズマ中を距離 $L = W_d/(e^2 w(0))$ 走ると全エネルギー $N_d W_d$ を失う．このときテストバンチが得る最大エネルギーは $L\mathrm{d}W_t/\mathrm{d}z = W_d(2N_d - N_t)$ である．したがって

$$\Delta W_t/\Delta W_d = 2 - N_t/N_d \leq 2 \tag{3.27}$$

が成り立つ．つまりエネルギー W_d のドライブバンチによるテストバンチのエネルギー増は最大でもドライブバンチの 2 倍ということになる．しかもこの 2 倍というエネルギー増が可能なのは，テストバンチの電流がドライブバンチの電流に比べ無視できる極限においてである．

トランス比は航跡場加速器を，ドライブバンチを 1 次側，テストバンチを 2 次側にもつトランスと見立てたことから生じた言葉である．ドライブバンチは大電流低エネルギーで，これを小電流高エネルギーをもつテストバンチに変換することを前提としている．

さてトランス比 R が 2 を越えないということは 1 GeV のドライブバンチを使ってもテストバンチのエネルギー増は 2 GeV しかないということである．これは航跡場加速を実用化しようとするとき大きな欠点となる．これを克服するため，図 3.5 のような進行方向にランプ状に立ち上がりストンと落ちるような分布，すなわち鋸の歯を 1 枚だけ取り出したような分布をもつドライブバンチの使用が考えられた[41]．

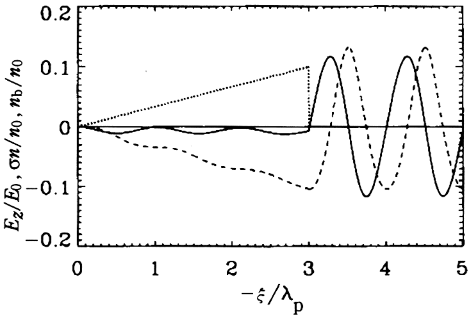


図 3.5　三角に整形されたバンチによる航跡場．点線はドライブバンチ内電子密度．破線は密度揺動．実線は航跡場[41)]

バンチ内で電荷がしだいに増加するものとして，式 (3.8) に

$$n_{\rm b}(z) = -\frac{2z}{L^2} \qquad (-L < z < 0) \tag{3.28}$$

を代入して計算すると

$$E(\xi) = -\frac{2E_{z0}}{{k_{\rm p}}^2L^2}[1-\cos(k_{\rm p}\xi)] \qquad (-L < \xi < 0) \tag{3.29}$$

$$= -\frac{2E_{z0}}{{k_{\rm p}}^2L^2}[\cos k_{\rm p}(\xi+L) - \cos(k_{\rm p}\xi) + k_{\rm p}L\sin k_{\rm p}(\xi+L)]$$

$$(\xi < -L) \tag{3.30}$$

となる．とくに $L = n\lambda_{\rm p}$ のときは

$$E(\xi) = -\frac{2E_{z0}}{k_{\rm p}L}\sin k_{\rm p}\xi \quad (\xi < -L) \tag{3.31}$$

である．ただし E_{z0} は，ドライブバンチが進行方向に大きさがないときの航跡場である．トランス比はバンチ内とバンチ後の航跡場の比であるから，$R = k_{\rm p}L/2$ である．この値は，バンチ長 L を大きくすることによりいくらでも大きくすることができる．図 3.5 はバンチ内電子密度の変化と，それに対応するプラズマ電子密度の減少，それに伴う電場の計算結果を示したものである[41)]．

ここで述べた方法では，バンチ内部で先行する粒子の航跡場が後続の粒子に作用するので，これをうまく利用して $R \leq 2$ の呪縛を逃れたのであった．実際はこのようにバンチ長を整形するのは技術的に困難である．しかし先行する

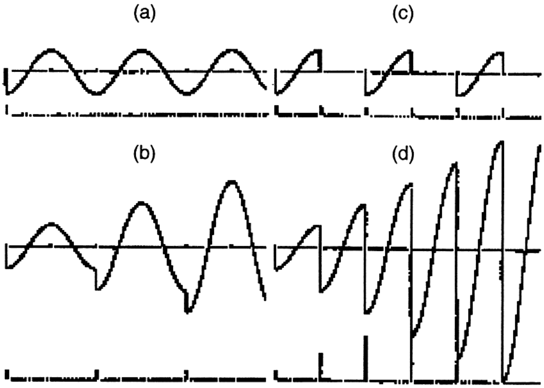


図 3.6　バンチ列による航跡場．各図の上は航跡場を示し，下はドライブバンチで，(a) は単バンチ，(b)～(d) は複数バンチを示す

粒子の航跡場が後続の粒子に作用させるためには，両者が同一のバンチ内に存在しなければならないという理由はない．かくて編み出されたのがパルス列の包絡線を整形する方法である(図 3.6)[42]．簡単のためにドライブバンチをデルタ関数的なパルスで近似する．図 3.6(b) に示すように，2 つ目以下のドライブバンチの入射タイミングが，存在しているプラズマ波と $k_p\xi = 2n\pi$ なる関係を満たすようにすれば，航跡場の最大値は線形に増加することが理解できる．$k_p\xi = (2n+1)\pi$ を満たすタイミングで入れると航跡場は図 3.6(c) のように打ち消される．

さらに図 3.6(d) のようにドライブバンチの粒子数を等差級数的に増加していくと，それにつれてトランス比も増加する．これは図 3.5 のような連続バンチの整形からも類推できることである．ふつうライナックは電磁波でバンチするので，電磁波の周波数で決まる間隔でドライブバンチをパルス化するのは容易であり，この方法は現実性がある．この方法で技術的に困難な点は，rf の周波数と共鳴するようにプラズマ周波数，すなわちプラズマ密度を，パルスの継続時間にわたって制御することにある．また，いままではイオンの運動を無視してきたが，あまりバンチ列を長くすると，イオンの運動が無視できなくなる．

もうひとつのトランス比の制限を逃れる方法は非線形プラズマ波を使用する

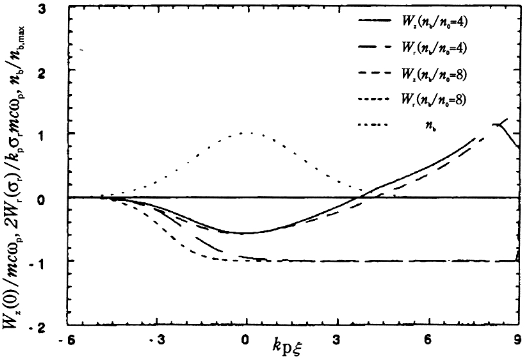


図 3.7　$n_\mathrm{b}/n_\mathrm{p}=4$ と 8 の場合の進行方向航跡場 W_z および半径方向航跡場 W_r [43)]

ことである．いままでプラズマ波がバックグラウンドのプラズマに与える摂動は $n_\mathrm{b}/n_\mathrm{p}$ は 1 よりはるかに小さいという前提で話を進めてきた．しかしビームの中の電子密度がプラズマ密度を越えたらどうなるであろうか．ビームはプラズマ電子をすべて吹き飛ばしてしまうであろう．結果として生じるプラズマ波はもはや美しい正弦波からはかけ離れたものになってしまう．図 3.7 は $n_\mathrm{b}/n_\mathrm{p}=4$ および 8 の場合の進行方向航跡場 W_z および半径方向航跡場 W_r のシミュレーションの結果である[43)]．縦軸は波の破壊限界 $m\omega_\mathrm{p}c$（ただし半径方向航跡場は $k_\mathrm{p}\sigma_r m\omega_\mathrm{p}c$）で正規化されている．このように破壊限界を超える航跡場が得られる．シミュレーションによればこの波はひとやま限りで終わってしまう．第 1 章で述べたようにビーム航跡場加速はレーザーを用いる方法に比べると加速勾配の点で見劣りがする．この非線形波を用いる方法によればレーザー法に対抗できると考えているグループもある．

このようにビーム航跡場加速ではいかにトランス比を上げるかが懸案である．過去の実験では KEK（高エネルギー加速器研究機構）で数個のバンチからなるバンチ列を用い，30 MeV/m の加速勾配を観測している[44)]．またより長いパルス列による基礎実験も行われている[45)]．今後の実験計画では，ANL（アルゴンヌ国立研究所）と UCLA（カリフォルニア大学ロスアンジェルス校）との共同研究が非線形プラズマ波の利用を[46)]，また BINP（ブトカー原子核研究所）ではバンチ列の利用を[47)]，SLAC（スタンフォード線形加速器センター）では UCLA,

USC (南カリフォルニア大学) と共同研究でドライブバンチの三角整形を公表している[48]．これらの計画はいずれも GeV/m 級の加速勾配と，GeV 級のエネルギー利得を目指している．

3.3　ビーム負荷

プラズマ波はテストバンチを加速(あるいは減速)するが，その反動でプラズマ波の振幅は減少する．とりあえずテストバンチの進行方向の大きさを無視し，デルタ関数的なバンチを想像しよう．このテストバンチ自身も式 (3.7) で与えられる航跡場を作り，その方向はバンチの位置ではマイナス方向で大きさは $e\sigma/\epsilon_0$ である．このテストバンチを航跡場に乗せて加速する．航跡場は進行方向に振動しているが，振幅が最大 E_0 でプラス方向の位相に乗せる．このとき

$$E_0 = e\sigma/\epsilon_0$$

であれば，すでに存在していたプラスの航跡場と，新たにテストバンチが作るマイナスの航跡場が相殺し，航跡場は消滅する．この式から，振幅 E_0 の航跡場が加速できる電荷あるいは粒子数 N は，電場の半径を r として

$$eN = \pi\epsilon_0 r^2 E_0 \tag{3.32}$$

ということになる[49]．

この状況でテストバンチが得るエネルギー幅は 100％である．現実にはバンチ長を無視できない．そしてバンチの先頭の粒子は E_0 の無垢の航跡場を感じるが，末尾の粒子には先行する粒子たちに食い荒らされたほとんどゼロの航跡場しか残っていないからである．

なおランダウ減衰は無衝突プラズマでも，波の位相速度よりわずかに速度が遅い粒子が存在すると，これらの粒子がプラズマ波からエネルギーを吸い取り，波を減衰させる現象である[25]．逆に位相速度より速い速度をもつ粒子は波を増幅する(ランダウ増幅)．このランダウ減衰とビーム負価との関連は，指摘されてはいるが，解析的に一方から他方を導くことは，まだなされていないようである[50]．

4章 プラズマからレーザーへ

レーザーでプラズマ波を作る件は次の章にまわし，この章では最初にレーザーによるプラズマ生成を述べ，ついでプラズマ中でのレーザーの振る舞いをまとめる．とくに後半は電磁波のプラズマ中での屈折率に関する物理とその応用が中心である．

4.1 トンネル電離によるプラズマ生成

われわれはプラズマ波のポテンシャルを粒子加速に用いようとしている．プラズマ波はプラズマの中に立つ波である．では，プラズマはどのように作ればよいか．これは数年前まではけっこう難しい問題であったが，大出力レーザーの出現であっさり解決してしまった．レーザーを用いるプラズマ加速，すなわちビート波加速，レーザー航跡場加速，自己変調レーザー航跡場加速では，加速に用いるのと同じレーザーでまずプラズマを作り，次に加速のための電場を作ることができる．ただし，ビーム航跡場加速では依然プラズマ生成が大きな技術的問題である．

レーザーの光子のもつエネルギーはイオン化エネルギーに及ばない．したがってレーザーでプラズマを作ることはできそうにない．しかし，レーザーの強度が大きくなると事情が異なる．レーザーの電場が，ガスを構成する原子の電子に十分な速度を与えると，レーザー電場が反転しないうちに電子が原子から離れる．この現象をトンネル電離といい，図 4.1 に図示する．ケルディィシュ (Keldysh) は束縛された電子が越えるべきポテンシャルの空間的な幅は $l = U_{\rm i}/eE_L$ の程度であるとした[51]．ただし $U_{\rm i}$ は原子のイオン化ポテンシャルである．一方，トンネル電離が起きるときの電子の速度は $v = (U_{\rm i}/m_{\rm e})^{1/2}$ の程度である．周波数 $v/l = eE_L/(m_{\rm e}U_{\rm i})^{1/2}$ がレーザー周波数 $\omega_{\rm L}$ よりも大きければトンネル電離

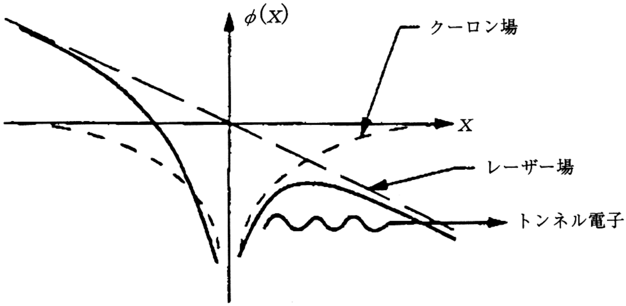


図 4.1　トンネル電離の概念

が起きることになる．現在ではパラメータ

$$\kappa = \frac{\omega_{\mathrm{L}}(2m_{\mathrm{e}}U_{\mathrm{i}})^{1/2}}{eE_L} \tag{4.1}$$

をケルディッシュ・パラメータといっている．$\kappa < 1$ であればトンネル電離が可能である．なお，$\kappa > 1$ の領域でも，ある程度電場が大きければ，多光子電離が可能である[52]．

プラズマ密度の増加を $\mathrm{d}n(t)/\mathrm{d}t = w[n_0 - n(t)]$ と書く．ケルディッシュの詳しい計算によれば

$$w = \frac{(6\pi)^{1/2}U_{\mathrm{i}}}{4\hbar}\left(\frac{eE_L\hbar}{m_{\mathrm{e}}^{1/2}U_{\mathrm{i}}^{3/2}}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{4(2m_{\mathrm{e}})^{1/2}U_{\mathrm{i}}^{3/2}}{eE_L\hbar}\left(1-\frac{m_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{L}}^2U_{\mathrm{i}}}{5e^2E_L^2}\right)\right] \tag{4.2}$$

である．レーザーの電場と強度の間にはポインティングの関係 $E = (2\Omega_0 I)^{1/2}$ がある．ただし $\Omega_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 377\Omega$ である．これを用いて計算すると，水素原子の場合，レーザー強度が $I = 10^{15}\mathrm{Wcm}^{-2}$ であれば，$w = 10^{16}\mathrm{s}^{-1}$ となる．

4.2　ガウスビーム

レーザー加速のひとつの欠点は加速距離が短いことである．加速距離が短ければ，加速勾配が大きくてもエネルギー利得は小さい．レーザーが与えられたものとして，このレーザーの強度を上げるには，レーザーを集光しなければならな

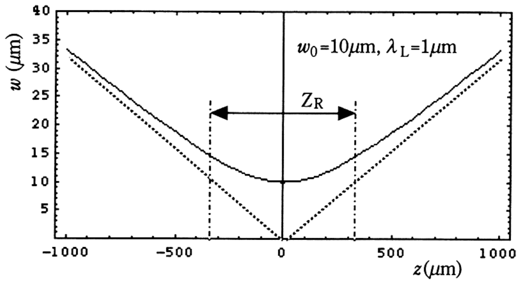


図 4.2　レーザーの波長 $\lambda_L = 1\,\mu\mathrm{m}$，ウェストサイズ $w_0 = 10\,\mu\mathrm{m}$ としたときのビーム径の進行方向への依存性

い．しかしレーザーを小さなスポットに絞れば絞るほど，焦点付近のレーザーの発散角は大きくなり，軸方向でレーザーに強度が大きい距離は小さくなる．

多くのレーザーは基本横モードだけが選択的に発振するように設計されている．このときレーザーの横方向の強度分布は断面のどこをとってもガウス分布をなす．すなわち，ピークパワー P をもつレーザーの強度 I の分布は

$$I(r,z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right] \tag{4.3}$$

である．スポットサイズの進行方向への依存性は

$$w(z) = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{{z_R}^2}\right)^{1/2} \tag{4.4}$$

となる．レーザーの波長 $\lambda_L = 1\mu\mathrm{m}$，ウェストサイズ $w_0 = 10\,\mu\mathrm{m}$ としたときのビーム径の進行方向への依存性を図 4.2 に示す．これらの式は次の手順で導出する[53)]．まず 2 枚の凹面鏡間を，光を往復させたときの共焦点(ウェスト：腰のくびれの意味)の光分布をフレネル回折により求める．次にこの光分布を光軸上の別な位置に凸レンズで再現する．

サイズ w は，通常 σ によって表す 2 乗平均半径の 2 倍で定義する．また z_R をレイリー長(Rayleigh length)というがこれはレーザーの焦点深度(回折長)の目安を与える．

w_0 と z_R の間には

$$z_R = \frac{\pi {w_0}^2}{\lambda_L} \tag{4.5}$$

の関係がある．以下添字Lでレーザーを表す．加速への応用という点では，z_R が長いほど加速距離が稼げ，結果として得られるビームエネルギーは高くなる．また w_0 が小さいほど加速勾配が大きく，やはり結果として得られるビームエネルギーが高くなる．しかし，この式は z_R と w_0 の両方を同時に良い方向にもっていくことはできないことを示している．$z \gg z_R$ では w/z は $\theta = w_0/z_R$ を頂角とする円錐面に漸近する．ここまでの記述はレーザーを伝搬する媒体が，真空でもプラズマでも成り立つ．

4.3 プラズマ中の電磁波の位相速度と群速度

次に，レーザーのプラズマ中での位相速度を考えよう．プラズマ中では電磁波の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

であるが，$E \propto \exp[i(k_L z - \omega_L t)] = \exp i\phi$ とおけば

$$k_L{}^2 = (\omega_L{}^2 - \omega_p{}^2)/c^2 \tag{4.7}$$

と変形できる．

このように，波における波数 k と ω の関係を示す式を分散式という．式 (4.7) はプラズマ中の電磁波の分散式である（k_L と ω_L の関係が分散式であって，ここでは ω_p は定数である．念のため）．分散関係は縦軸に ω，横軸に k をとった平面で，図 4.3 のように図示するのが慣例である．プラズマ波の分散式は v_e を電子速度として

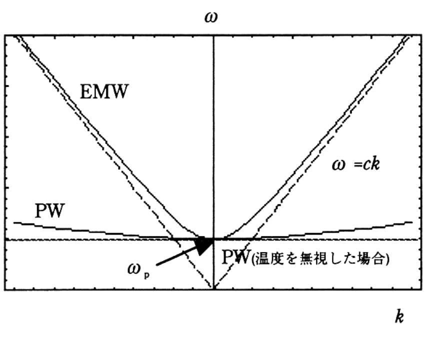


図 4.3 プラズマ中の電磁波(EMW)とプラズマ波(PW)の分散関係

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_e^2$$

であるが，プラズマ加速の分野では $v_e = 0$ と近似してしまうことが多い（この近似が正しいかどうかは別な問題である）．このとき $\omega = \omega_p$ であって，周波数と波数は独立でありうる．このような波を「分散がない」という．図 4.3 に示すように $v_e = 0$ のときはプラズマ波の分散式は k 軸に平行な直線である．

ここで $v_{pL} = \omega_L/k_L$ を用いると

$$\frac{c^2}{v_{pL}^2} = 1 - \frac{\omega_{pL}^2}{\omega_L^2} \tag{4.8}$$

を得る．これはプラズマ中のレーザーの位相速度が光速より大きいことを示している．ただし，後で述べるように，粒子加速をもたらすのは，群速度

$$\frac{\partial \omega_L}{\partial k_p} = v_{gL} = \frac{c^2}{v_{pL}} = c\left(1 - \frac{{\omega_p}^2}{{\omega_L}^2}\right)^{1/2} < c \tag{4.9}$$

であり，このように光速より小さい．レーザーが作るプラズマ波の位相速度は，この v_{gL} に等しくなる．

屈折率の定義は

$$N = \frac{c}{v_{pL}} = \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4.10}$$

である．このように電磁波（レーザーも電磁波である!）の屈折率がプラズマ密度に依存することがさまざまな現象を引き起こす．この章の後半はこうした現象の記述である．

プラズマ密度が十分大きく，プラズマ周波数の方が電磁波の周波数よりも大きくなると，式 (4.10) の右辺は虚数となる．このとき電磁波はプラズマ中を伝搬できない．この領域を過剰密度領域(overdense region)といい，不足密度領域(underdense region)と区別する．

4.4　レーザーのチャネリング

あまり密度が高くないプラズマ中でのレーザー航跡場加速では加速距離がまず回折長で制限される．レーザーのチャネリング（光導波；optical guiding）は，この回折長の制限を克服する方法である．

プラズマ中でのチャネリングの説明の前に，カー (Kerr) 効果についてつけ加えておく．この効果ゆえに中性ガスもチャネリング効果をもつ．中性ガスの屈折率 N は光強度 I に比例する項をもつ，すなわち

$$N = N_0 + N_2 I \tag{4.11}$$

である．N_2 は磁化率 (磁気感受率) の関数である[57]．この右辺第 2 項の非線形性のために，光は強度の大きい方向に集中する．言い換えれば，この項はチャネリングの効果をもつ．この効果のために大パワーレーザーの増幅は不可能である．光学素子中でパワーが集中し素子を破壊するからである．チャープパルス増幅はこれを回避するために考え出された[14]．ただし光が集中すれば，中性ガスはイオン化するので，屈折率は

$$N(r) = N_0 + N_2 I(r) - \frac{1}{2}\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2(r)}{\omega_{\mathrm{L}}^2} \tag{4.12}$$

とでも表すべき状態となる．右辺第 2 項は光を集中させ，第 3 項は発散させる．この 2 項がうまくバランスすれば光は導かれる[58]．

すでに述べたように真空あるいは一様な密度のプラズマ中では，レーザーを一定な半径のまま伝搬させることはできない．しかし，われわれはすでにある媒質中ではレーザーが一定な半径のまま伝搬することを知っている．その媒質とは，光ファイバーである．分布屈折率ファイバー (graded index fiber) では，ファイバーの中心では屈折率が大きく，周辺にいくに従い屈折率が小さくなっている．光はここをジグザグに進むが，ある半径の外に出ることはない．

屈折率分布 g を定数として

$$N^2(r) = N^2(0)[1 - (gr)^2] \tag{4.13}$$

と仮定する[59]．z 軸に沿って進む光線の r 座標は光線方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{2C}\frac{\partial}{\partial r}N^2(r) \tag{4.14}$$

で表される．式 (4.13) を光線方程式に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{g^2}{C}N^2(0)r \tag{4.15}$$

を得る．C は光線の初期位置に依存する定数であるが，近軸光線では $C = N^2(0)$ とおける．この解は

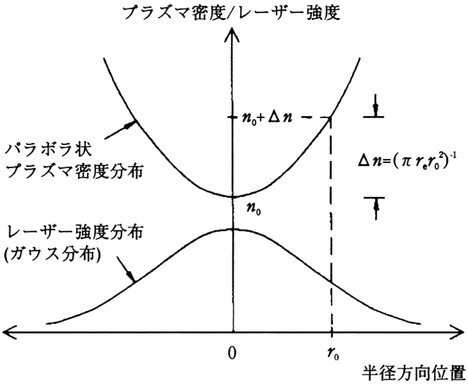


図 4.4　2 乗分布をなす密度チャネルにおいて光導波路として必要な深さ Δn[54)]

$$r = r(0)\cos(gz) + \frac{r'(0)}{g}\sin(gz) \tag{4.16}$$

である．レーザーはチャネルの中を蛇行しながら進むことがわかる．

角周波数 ω の電磁波（この場合はレーザー）の屈折率 N はプラズマの密度に式(4.10) のように依存する．あらかじめ航跡場加速用のレーザーの通り道に沿って，プラズマ密度の小さいチャネルを作っておけば，レーザーはこのチャネルの中を収束したまま伝搬し，加速距離はレイリー長を越えると期待される．

詳しい計算によれば，図 4.4 のようにプラズマ密度に 2 乗分布を作って導波特性をもたせるとき，導波路の深さを $\Delta n_{\mathrm{c}} = n(r_0) - n_0$ とすれば，必要なプラズマ密度の差は

$$\Delta n_{\mathrm{c}} = 1/(\pi r_{\mathrm{e}} w^2) \tag{4.17}$$

である[54)]．ただし，r_{e}，w はそれぞれ電子の古典電子半径とレーザーの半径である．

このレーザーチャネリングには 2 つの生成方法がある．第 1 の方法では，この密度チャネルを，加速用のレーザーそのもので作る．レーザーのパワーが大きくなるとプラズマ中の電子が相対論的に運動する結果，自己光導波の効果が生じる．第 2 の方法は主レーザーが通る前に，なんらかの方法で主レーザーの導波路を用意してやる方法である．導波路を作るためには別なレーザーを使う．

また，すでに述べたように，プラズマ振動に伴う横方向の航跡場はレーザーを収束・発散させる．プラズマ振動の半径を r_p とし，プラズマ振動に伴う密度変動を

$$\delta n = \delta n_0 \exp(-r^2/{r_\mathrm{p}}^2) \sin k_\mathrm{p}(z - ct)$$

で表す．このプラズマ振動がもたらす屈折率分布は

$$N(r,z) = 1 - \frac{{\omega_\mathrm{p}}^2}{{\omega_\mathrm{L}}^2}\left[1 + \frac{\delta n_0}{\Delta n_c}\exp\left(-\frac{r^2}{{r_0}^2}\right)\sin k_\mathrm{p}(z - ct)\right] \tag{4.18}$$

である[55]．ここで Δn_c は式 (4.17) で定義した，光導波路形成のために必要なプラズマ密度差である．

以上をレーザービームの包絡線が従うべき方程式(包絡線方程式)としてまとめることができる．この導出はいささか複雑なので省略し，結果のみを示すと[56]

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{{z_\mathrm{R}}^2 R^3}\left[1 - \frac{P}{P_\mathrm{c}} - \frac{\Delta n}{\Delta n_\mathrm{c}}R^4 + \frac{\delta n_0}{\Delta n_\mathrm{c}}\frac{R^4}{{R_\mathrm{p}}^2}\frac{\sin k_\mathrm{p}\zeta}{[1 + (1/2)(R/R_\mathrm{p})^2]^2}\right] \tag{4.19}$$

である．ただし，R，R_p はそれぞれ $z = 0$ におけるレーザー半径で規格化したレーザーおよびプラズマの半径，Δn は2パルス法で作られたチャネルの深さである．この式の右辺の括弧内の第2項は相対論的チャネリングの効果，第3項は2パルス法のチャネリングの効果，第4項はプラズマ波による収束を表す．第2項以下がないものとしてこの方程式を解くと，式 (4.4) と等価な結果が得られる．

A．相対論的チャネリング

大出力レーザーの場ではプラズマ電子が，横方向に相対論的に運動する結果質量が大きくなる．このためプラズマ周波数は

$${\omega_\mathrm{p}}^2(r,z) = \frac{n(r,z)}{n_0}\frac{{\omega_\mathrm{p0}}^2}{\gamma_\perp(r,z)} \tag{4.20}$$

に減少する．ただし

$$\gamma_\perp(r,z) = [1 + a_0^2(r,z)]^{1/2} \tag{4.21}$$

で，a_0 は次の章で説明するレーザー強度パラメータで，われわれの場合 0.1 から 1 のあいだの値をとることが多い．この式は相対論的な効果が光チャネル中心部でのプラズマの希薄化を拡大し，周辺にかけての密度勾配も増大させるこ

とを示している．これに伴って屈折率 N も r, z の関数となる．光導波の条件は $\partial N/\partial r < 0$ である．

レーザーの出力が臨界出力

$$P_{\mathrm{c}} = 2c\left(\frac{m_{\mathrm{e}}c^2}{e}\right)^2\left(\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{p0}}}\right)^2 = 17.5 \times 10^9\left(\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{p0}}}\right)^2 \,[\mathrm{W}] \qquad (4.22)$$

より大きいときは，光束は収束するが，臨界出力より小さいときは回折によって発散することが知られている．文献 60) は相対論を考慮したプラズマ電子の運動方程式から出発してこの式を導いている．

次の疑問が生じるかもしれない．仮に大出力のレーザーがあって，臨界出力を越えていたとしても，焦点のサイズを大きくすれば出力密度は小さくなる．このように焦点をぼかしたときには相対論的チャネリングは起こり得ないのではないか？　答えは「起こる」である．式 (4.17) に示したように，レーザーの径が大きければ，導波路の深さは浅くてよい．言い換えれば，導波路形成に寄与するプラズマ密度は小さくてよいからである．

式 (4.11) は $\omega_{\mathrm{p}}{}^{-1}$ より大きい時間領域を念頭においている．言い換えれば，相対論的チャネリングは，$\omega_{\mathrm{p}}{}^{-1}$ より小さい時間領域では起こり得ない．プラズマ航跡場加速へ相対論的チャネリングを応用するためには $\omega_{\mathrm{p}}{}^{-1}$ より長いレーザーパルスを使用しなければならない．これが後で述べる自己変調レーザー航跡場加速である．

最後にこの現象の観測例をひとつ紹介する[61)]．図 4.5 は波長 1053 nm でいろいろな出力をもつレーザーを，密度 $3.6 \times 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$ のプラズマに導入したときの，レーザーの側方散乱を撮影したものである．$2\,Z_{\mathrm{R}} = 430\,\mu\mathrm{m}$ で，レーザー出力の臨界出力に対する比 $P/P_{\mathrm{c}} = 1.6$ のときはチャネル長は回折長よりも短い．しかしレーザー出力を上げるにつれチャネル長も伸び，$P/P_c = 7.2$ では $850\,\mu\mathrm{m}$ に達する．実はプラズマ長がこの程度なので（ガスを真空中に噴出してこれにレーザーをあてることによりプラズマを作っている．プラズマ長はノズル径で決まる），チャネルがもっと長くできる可能性もある．

B．プレチャネル法

相対論的チャネリングが短いレーザーパルスに有効でないという欠点を補うのがプレチャネル法である．ここでは 2 つのレーザーパルスを使う方法を紹介

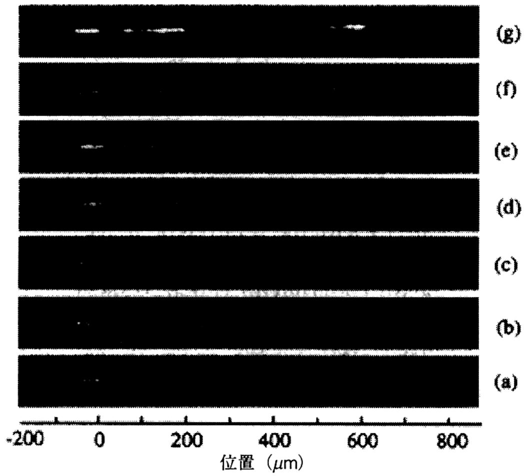


図 4.5　レーザー軸からの側方散乱．プラズマ密度は $3.6 \times 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$．レーザー出力の臨界出力に対する比 $P/P_c = (a)1.6, (b)2.6, (c)3.9, (d)5.5, (e)7.2, (f)8.4, (g)9.1$[61)]

する．この方法では最初のパルス(プレパルス)が作った光導波路中を，主レーザーパルスがその径をかえることなく伝搬する．このための導波路，すなわちレーザー軸上でプラズマ密度が小さく，周辺で大き半径方向分布の形成のためにいくつかの技術が提唱されている．

ここでは，これらのうちですでに実験結果が得られている，衝撃波を利用する方法を紹介する．図 4.6 のようなアキシコンという，片面が平面，片面が円錐面をもつ光学素子を用いると，焦点をある程度直線状に引き伸ばすことができる．

中性ガス中にこのような方法でレーザー強度の大きい部分を直線上に作ると，その部分にスパークが生じる．このスパークプラズマが音速で半径方向に広が

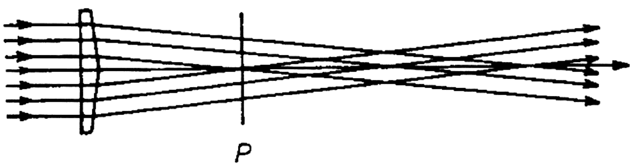


図 4.6　アキシコン

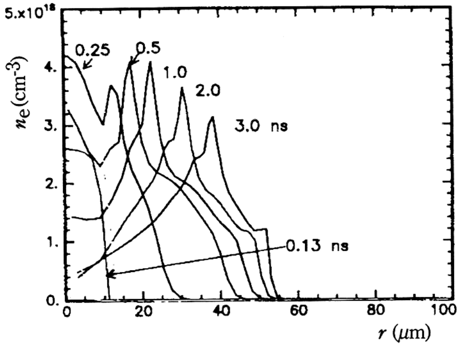


図 4.7 30 Torr のアルゴンガス中に強度 4×10^{14} W/cm^2，ウエストサイズ 10 μm，波長 1.06 μm，パルス幅 100 ps のレーザーを入射したときの電子密度の半径方向分布の時間変化の計算結果[62)]

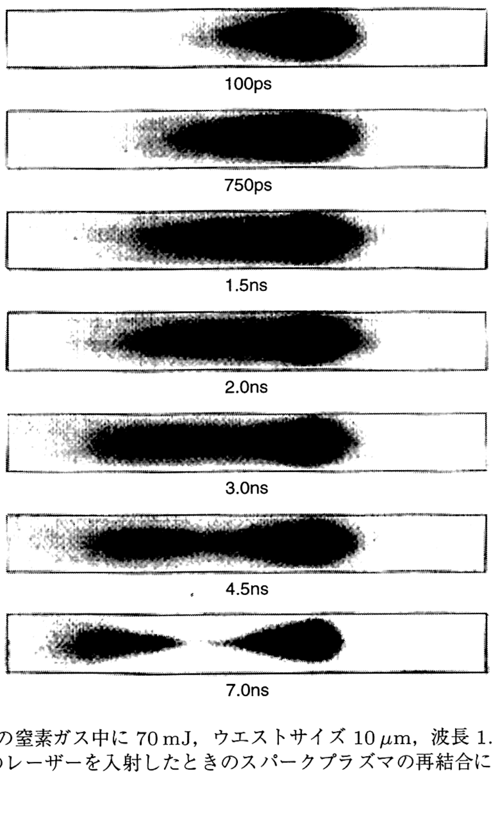


図 4.8 60 Torr の窒素ガス中に 70 mJ，ウエストサイズ 10 μm，波長 1.04 μm，パルス幅 100 ps のレーザーを入射したときのスパークプラズマの再結合に伴う発光の観測結果[63)]

るときに，イオン相互間およびイオン分子衝突のために，中性ガスとプラズマの境界に衝撃波が生じる．この衝撃波がさらに半径方向に広がるとき，プラズマ密度が中心部で小さく，半径方向に大きくなる時間領域が生じる．図4.7はプラズマ密度の半径方向分布の時間変化を計算した結果である[62]．2.0 ~ 3.0 ns付近では電子密度はパラボラに近い分布をもつことがわかる．

このように最適な半径方向のプラズマ分布が形成されたタイミングで主レーザーパルスを入射すれば，主レーザーは収束したまま伝搬する．図4.8はスパークプラズマが再結合する際の発光を測定した結果であり，プラズマチャネルが時間とともに成長する様子が見てとれる[63]．最大レイリー長の70倍まで，入射したレーザーのエネルギーの75％が伝搬したと報告されている．

プレチャネルを作る方法はほかにもあり，最近ではキャピラリー(細管)中で中心が低密度，壁際が高密度のプラズマを作る方法が話題になっている[64]．またキャピラリーの与える境界条件ではプラズマの有無にかかわらずレーザーがガウス分布的な断面で伝播するモードが存在するので，これを利用するアイデアもある[65]．

4.5 干渉法によるプラズマ波の測定

レーザーの屈折率のプラズマ密度依存性を応用して，プラズマ波を観測することができる．測定の原理は古くから行われているマイクロ波干渉計によるプラズマ密度測定と変わらない．しかしプラズマ波長に比べて十分短いパルス幅をもつレーザーを用い，プラズマ波を直接観測する点が進んでいる．プラズマ波はプラズマ密度の振動にほかならないが，この振動を時間を追って観測できるのだ．今日ではパルス幅100 fs以下のレーザーが使える．ちなみにプラズマ波長100 fs (30μm)はプラズマ密度に換算すると1.23×10^{18}cm^{3}である．

図4.9に測定法を示した．ここではプラズマ波を作るレーザーの一部をビームスプリッター(BS)で分けたのち，第2高調波発生器(SHG)で周波数を変換して密度測定に使用している．SHGを出たレーザーはさらに2つに分割された後，同一の軌道をプラズマ容器へと導かれる．

プラズマ波とプラズマ中のレーザーが同じ速度をもつものとする（実はこの測定法はこの条件を満たす加速法，すなわち次の章で述べるレーザー航跡場加

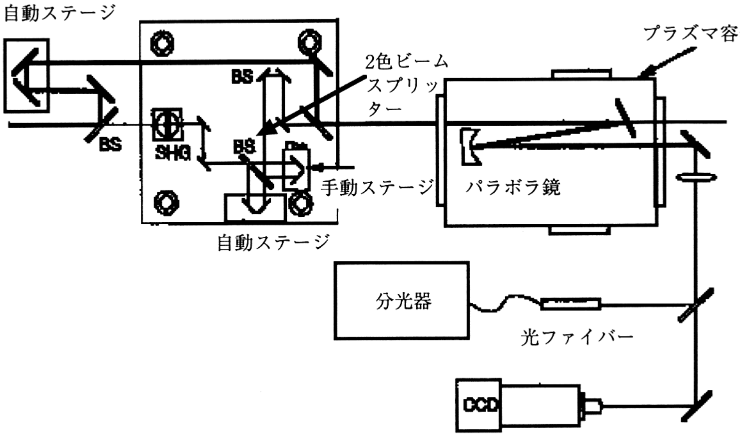


図 4.9 干渉法によるプラズマ波の測定．BS：ビームスプリッター，SHG：第 2 高調波発生器(SHG)[66)]

速のために開発された)．プラズマ波と同軸に2つのレーザーパルスを時間差 τ で入射し互いに干渉させる．レーザーの位相差 $\Delta\psi$ と屈折率/プラズマ密度との関係

$$\Delta\psi = \int (N_2 - N_1)(\omega_{\rm L}/c){\rm d}L$$

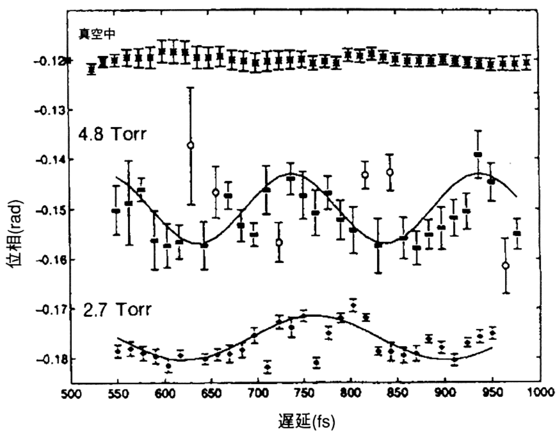


図 4.10 周波数領域干渉法によって測定した密度揺動のガス圧(プラズマ密度)依存性[67)]

$$N_i = \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}i}^2}{\omega_{\mathrm{L}}^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{n_{\mathrm{p}i}^2}{n_{\mathrm{c}}^2}\right)^{1/2} \quad (i = 1, 2) \qquad (4.23)$$

から時間差 τ に対応する密度差がわかる．

技術的な理由により，時間差 τ を一定に保ち，これらのパルス対を投入する絶対時刻を掃引することにより密度揺動を測定することが多い．図 4.10 はこの方法で観測された密度揺動である[67)]．なお干渉計の原理は文献 68) を参照していただきたい．

5章 レーザーからプラズマへ

この章の主題はレーザーによる加速である．理論的なことから話を始め，次に実験に言及する．図 5.1 にレーザー航跡場加速の実験装置の一例を示した．自己変調レーザー航跡場加速の実験装置も似たようなものである．図ではレーザーでカソードを衝撃して電子バンチを得，さらにシケインという電磁石群でバンチ圧縮を行うことを想定している．これはプラズマ加速ではプラズマ波長に比べて十分短いバンチを使うことが必要だからである．プラズマ室と線形加速器本体は差動排気によって真空的に分離する．

5.1　規格化ベクトルポテンシャル

今後のために，レーザーのパラメータを記述するための実用的な単位を導入しておく．まず，クーロン・ゲージを用い，ベクトルポテンシャルを $m_e c$ で規

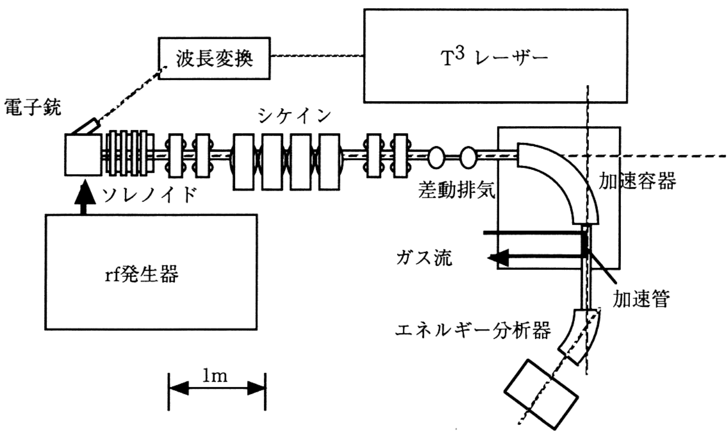


図 5.1　レーザー航跡場加速の実験装置

格化して「規格化ベクトルポテンシャル」

$$a = \frac{eA}{m_{\mathrm{e}}c} \tag{5.1}$$

を定義する．規格化ベクトルポテンシャルに基づいて電磁波を記述する流儀については教科書[70]などを勉強していただきたい．なお本書ではベクトルもスカラーも同じ活字を用いるので，注意していただきたい．

われわれの興味はレーザーとプラズマの相互作用にある．プラズマ電子はプラズマ周波数以下の周波数でしか動けない．レーザーパルスの包絡線の周波数はプラズマ周波数より低くなりうるが，レーザーそのものの周波数はプラズマ周波数よりずっと高いものとする．プラズマ周波数がレーザー周波数を越えるような高密度プラズマにはレーザーは入り込めないからである．そこで a のうちでゆっくりと変化する成分をレーザー強度パラメータと称し，a_0 で表す．ゆっくりという意味は，λ_{L}/c より長く，λ_{p}/c より短いタイムスケールを想定するということである．今後われわれは主に a_0 を相手にする．

このような思想により

$$a(z,t) = (1/2)a_0 \exp[-i(\omega_{\mathrm{L}}t - k_{\mathrm{L}}z)] + \mathrm{c.c.} \tag{5.2}$$

と展開する．c.c.(複素共役)を加えたのは，虚数部には意味がないから排除したいためである．実数部のみを考慮するという暗黙の了解を前提にするなら，書かなくてもよい．円偏光の場合は

$$a^2 = a_0^2 \tag{5.3}$$

直線偏光の場合は

$$a^2 = (1/2)a_0^2 + (1/4)a_0^2 \exp[-2i(\omega_{\mathrm{L}}t - k_{\mathrm{L}}z)] + \mathrm{c.c.} \tag{5.4}$$

である[71]．以下つとめて円偏光の場合と直線偏光の場合を併記するが，実際に加速に用いるレーザーはほとんどの場合直線に偏光している．また，レーザーが作る航跡場は，実はレーザーのパワーのみに依存し偏光状態には依存しない．

a_0 の絶対値をレーザー強度パラメータという．これは

$$a_0 = \frac{e<E>}{m_{\mathrm{e}}c^2k_{\mathrm{L}}} = \frac{e<E>}{m_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{L}}c} \tag{5.5}$$

とも書ける．$< E >$ はレーザーの電場のうちゆっくりと変化する成分という意味である．この式を式 (2.8) と比べていただきたい．この形式の規格化が常套的であることがおわかりいただけるであろう．ポインティングの関係

$$E = (2\Omega_0 I)^{1/2} \tag{5.6}$$

を用いて，レーザー強度との関係において

$$a_0 = \left[e^2 \Omega_0 {\lambda_L}^2 I / 4\pi^2 (m_e c^2)^2\right]^{1/2} \tag{5.7}$$

と書き直しておくと便利である．具体的には

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.85 \times 10^{-9} \lambda_L\,(\mu\mathrm{m})\, I^{1/2}\,(\mathrm{W \cdot cm^{-2}}) \qquad \text{円偏光} \\ &= 0.60 \times 10^{-9} \lambda_L\,(\mu\mathrm{m})\, I^{1/2}\,(\mathrm{W \cdot cm^{-2}}) \qquad \text{直線偏光} \end{aligned} \tag{5.8}$$

である．ここで $k_L = \omega_L / c$，$\Omega_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ は真空の抵抗 (377 Ω) である．I はレーザー強度といわれるものだが，電磁気学におけるポインティングベクトル S の絶対値にほかならない．ガウスビームのウエストを w_0 とすれば，直線偏光の場合レーザーパワーは $I = 2P/\pi w_0^2$ として

$$P(\mathrm{GW}) = 21.5 (a_0 w_0 / \lambda_L)^2 \tag{5.9}$$

となる．

また

$$v_q = \frac{eE}{m_e \omega_L} \tag{5.10}$$

で定義される，振動速度 (quiver velocity) もときどき用いられる．これは捕捉された粒子が波のポテンシャルの中で振動する速度を表す．これを用いると

$$a_0 = \frac{v_q}{c} \tag{5.11}$$

である．

5.2　レーザーの動重力

レーザーは横波 (TE 波) であって，電子を軸方向に加減速することはできそうもない．しかし光のかたまりとしてのレーザーは光の圧力とでもいうべきも

のをもつ．すでに述べたように，この力を ponderomotive force といい，動重力と訳す．

プラズマ中の 1 個の電子の運動方程式は

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -e(E + v \times B) \tag{5.12}$$

と表される．左辺を書き直して

$$m_{\mathrm{e}}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right] = -e(E + v \times B) \tag{5.13}$$

を得る．先ほどの振動速度を用いて，v を

$$v = v_{\mathrm{q}} + \delta v \tag{5.14}$$

と展開する．すると，1 次の項は

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\partial v_{\mathrm{q}}}{\partial t} = -eE \tag{5.15}$$

を満たす．これはレーザーの横電場がその方向に電子を振動させることを示す．残った 2 次の項は

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -m_{\mathrm{e}}(v \cdot \nabla)v_{\mathrm{q}} - e(v_{\mathrm{q}} \times B) \tag{5.16}$$

を満たす．$B = \nabla \times A = (m_{\mathrm{e}}c/e)\nabla \times a$ および $v_{\mathrm{q}} = ca$ を用いて 2 次の運動方程式を書き直せば

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -m_{\mathrm{e}}^2[(a \cdot \nabla)a + a \times (\nabla \times a)] \tag{5.17}$$

となる．右辺を書き直せば

$$m_{\mathrm{e}}\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -m_{\mathrm{e}}c^2\nabla\left(\frac{a^2}{2}\right) \tag{5.18}$$

を得る．ここで $< a^2 >= {a_0}^2$ (円偏光の場合) あるいは $< a^2 >= {a_0}^2/2$ (直線偏光の場合) を用いて時間平均すれば

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{e}}\frac{\partial \delta v}{\partial t} &= -m_{\mathrm{e}}c^2\nabla\left(\frac{{a_0}^2}{2}\right) \qquad \text{円偏光} \\ &= -m_{\mathrm{e}}c^2\nabla\left(\frac{{a_0}^2}{4}\right) \qquad \text{直線偏光} \end{aligned} \tag{5.19}$$

である．これらの運動方程式の右辺を動重力といい，F_{p} で表す．レーザー強度が大きく，その勾配が大きいほど，動重力は大きい．

5.3 短パルスレーザーによるプラズマ波の励起

レーザーによるプラズマ振動の励起は，式 (3.3)～(3.4) において，強制項をビームでなくレーザーの動重力とすれば導くことができる．プラズマ中の電子密度の振動は

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + {\omega_\mathrm{p}}^2 n_1 = \frac{n_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e}} \nabla \cdot F_\mathrm{p} \tag{5.20}$$

であるが，ポテンシャル振動として

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + {k_\mathrm{p}}^2 \phi = -{k_\mathrm{p}}^2 \phi_\mathrm{p} \tag{5.21}$$

で記述することもできる．ただし $\xi = z - v_\mathrm{p} t$，z は進行方向の座標，v_p はプラズマ波の位相速度である．また，右辺に現れる

$$\begin{aligned} \phi_\mathrm{p} &= -m_\mathrm{e} c^2 {a_0}^2 / 2e \qquad \text{円偏光} \\ &= -m_\mathrm{e} c^2 {a_0}^2 / 4e \qquad \text{直線偏光} \end{aligned} \tag{5.22}$$

は，動重力ポテンシャルであって，先に求めた動重力と

$$F_\mathrm{p} = e \nabla \phi_\mathrm{p}(r, \xi) \tag{5.23}$$

の関係がある．これを用いると式 (5.20) は，例えば円偏光の場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + {\omega_\mathrm{p}}^2 \right) \frac{n_1}{n_\mathrm{p}} = -c^2 \nabla^2 \cdot \frac{a_0^2}{2}$$

となる．これと対応するビーム航跡場加速の場合の式は，式 (3.4) を変形して得られる

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + {\omega_\mathrm{p}}^2 \right) \frac{n_1}{n_\mathrm{p}} = \omega_\mathrm{p}^2 \frac{n_\mathrm{b}}{n_\mathrm{p}}$$

である．ビーム航跡場加速の場合は $n_\mathrm{b}/n_\mathrm{p}$ という物理的にイメージが作りやすい項が振動の強制項に入るが，レーザー航跡場加速の場合はあまりわかりやすくない．

バンチ形状も考慮した振動の方程式の解は，式 (3.8) にならって畳み込み積分を行って

$$\phi(r, \zeta) = k_\mathrm{p} \int_\zeta^\infty \mathrm{d}\zeta' \sin k_\mathrm{p}(\zeta - \zeta') \phi_\mathrm{p}(r, \zeta') \tag{5.24}$$

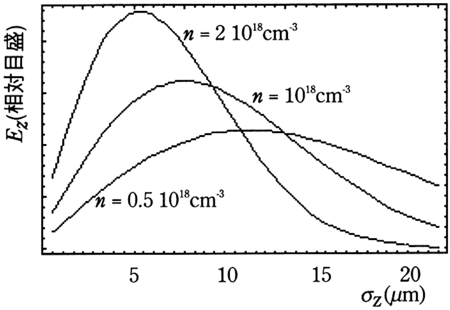


図 5.2　電子密度をパラメータとする，加速勾配のレーザーパルス幅への依存性

となる．具体的な形を求めるために，レーザーパルスが進行方向にも，半径方向にもガウス分布をなす，すなわち

$$a(r,\zeta) = a_0 \exp(-r^2/2{\sigma_r}^2 - \zeta^2/2{\sigma_z}^2) \tag{5.25}$$

と仮定する．詳しい計算によれば，加速勾配 eE_z は

$$\lambda_\mathrm{p} \sim \pi\sigma_z \tag{5.26}$$

のとき最大で

$$(eE_z)_\mathrm{max} = \frac{2e^2\Omega_0\lambda_\mathrm{L}^2 I}{\pi^{3/2}\exp(1)m_\mathrm{e}c^2\sigma_z} \tag{5.27}$$

となる．ただし，加速勾配のプラズマ密度依存性は図 5.2 に示すようにゆるやかである．密度が厳しい共鳴条件をもたないために，レーザー航跡場加速の実験は後に述べるビート波加速の実験よりやさしい．例えば，半値全幅パルス長 100 fs，波長 800 nm，2 TW のチタンサファイアレーザーをウェスト 40 μm に絞ると，これに対する最適なプラズマ密度は $7\times10^{17}\mathrm{cm}^{-3}$ であって，このときの加速勾配の最大値は 1.48 $\mathrm{GeV\cdot m^{-1}}$ である．

ガウス的レーザービームの航跡場はレイリー長を用いて

$$eE_z(r,z,t) = \frac{k_\mathrm{p}\sigma_z}{z_\mathrm{R}[1+(z/z_\mathrm{R})^2]}\frac{e^2\Omega_0 P}{\sqrt{\pi}m_\mathrm{e}c^2}\frac{\lambda_\mathrm{L}}{\lambda_\mathrm{p}} \times \exp\left(-\frac{{k_\mathrm{p}}^2{\sigma_z}^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)\cos\psi$$

$$eE_r(r,z,t) = \frac{2e^2 r k_\mathrm{p}\sigma_z k_\mathrm{p}\sigma_z}{{z_\mathrm{R}}^2[1+(z/z_\mathrm{R})^2]^2}\frac{\Omega_0 P}{\sqrt{\pi}m_\mathrm{e}c^2} \times \exp\left(-\frac{{k_\mathrm{p}}^2{\sigma_z}^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)\sin\psi \qquad (5.28)$$

となる．ただし

$$\psi = k_\mathrm{p}\zeta = k_\mathrm{p}z - \omega_\mathrm{p}t \qquad (5.29)$$

である．

テストバンチの速度がプラズマ波の位相速度に等しいなら，テストバンチのエネルギー利得は

$$\int_{-\infty}^{\infty} eE_z\mathrm{d}z = \frac{e^2\pi^{1/2}\Omega_0 P}{m_\mathrm{e}c^2}\frac{\lambda_\mathrm{L}}{\lambda_\mathrm{p}}k_\mathrm{p}\sigma_z\exp\left(-\frac{{k_\mathrm{p}}^2{\sigma_z}^2}{4}\right)\cos\psi \qquad (5.30)$$

であって，$\cos\psi = 1$ のときに最大である．さらに $k_\mathrm{p}\sigma_z = 2$ のときは

$$\int_{-\infty}^{\infty} eE_z\mathrm{d}z = \frac{2\pi^{1/2}e^2\Omega_0}{\exp(1)m_\mathrm{e}c^2}\frac{\lambda_\mathrm{L}}{\lambda_\mathrm{p}} = (eE_z)_\mathrm{max}z_\mathrm{R} \qquad (5.31)$$

となる．この式はスポットサイズを含まない．すなわちどのようにレーザーを集光しようと，エネルギー利得は一定であることを示している．

図 5.3 はレーザー強度の変化と，それが引き起こす電離，プラズマ密度変調，軸方向の航跡場を示したものである．レーザー強度はピーク $10^{18}\,\mathrm{W\cdot cm^{-2}}$ の

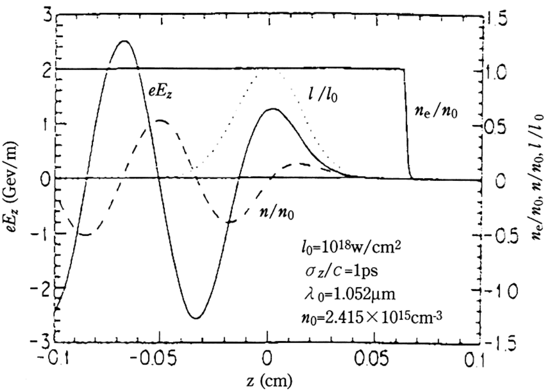


図 5.3　レーザー強度の変化とそれが引き起こす電離プラズマ密度変調および軸方向の航跡場

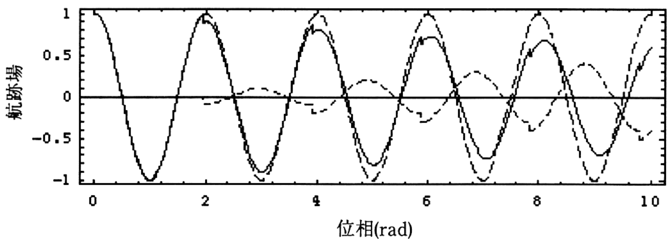


図 5.4　レーザーによる航跡場（点線），テストバンチ列による航跡場（点線）およびこれらの合計（破線）

ガウス分布を仮定した．ガス密度は生成されたプラズマの密度がレーザーのパルス長と $\sigma_z = \lambda_\mathrm{p}/\pi$ の関係を満たすように選んだ．図が示すように，レーザー強度がピークに到達するはるか以前に，レーザーのパスに沿ったガスは完全に電離されてしまう．こうして生成されたプラズマの 50 %がプラズマ振動に寄与し，航跡場は $2.5\,\mathrm{GeV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ に及ぶ．

図 5.4 はビーム負荷を伴う航跡場がしばらく走った後の進行方向依存性を示したものである．テストバンチはバンチ幅無限小でプラズマ周期で投入されるものとする．テストバンチの速度はプラズマ波の位相速度よりも大きいために，テストバンチが乗る位相は振幅最大の位相からしだいに前方へとずれる．また，テストバンチ自体も航跡場を作るが，これはすでに述べたようにテストバンチの存在する位相 ψ_{0i} から $-\cos(k_\mathrm{p}z - \psi_{0i})$ のように生じる．このテストバンチによる航跡場は，光速で進むので，やはりレーザーによる航跡場との間にずれを生じる．

この加速法の加速距離は回折長，脱位相長，ポンプ能枯渇長のいずれかで決まる．前 2 者についてはすでに述べた．ここでポンプ能枯渇長について触れておこう．航跡場を作る見返りとして，レーザーはパワーを失う．ポンプ能枯渇長はレーザーのパワーが半分になる距離と定義されている．これについていくつかの論文[72, 73]があるが，ここでは単純に

$$L_\mathrm{pump} = \lambda_\mathrm{p}\frac{E_\mathrm{L}^2}{E_\mathrm{p}^2} = \frac{\pi c}{\omega_\mathrm{p}}\frac{E_\mathrm{L}^2}{E_\mathrm{p}^2} \tag{5.32}$$

としておく．E_p はレーザーが作った航跡場，E_L はレーザーの電場，$\lambda_\mathrm{p} = \pi c/\omega_\mathrm{p}$

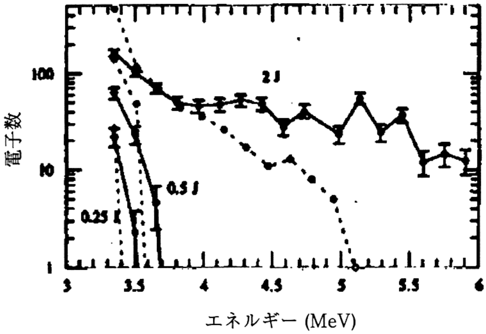


図 5.5 レーザー航跡場によって加速された電子のエネルギースペクトル[76]

はレーザー航跡場加速におけるレーザーの最適パルス幅である．なお光学的に活性な媒質すなわちレーザー媒質でプラズマに選び，加速と同時にレーザー増幅も行ってポンプ能の消耗を回避する案もある[74,75]．

この加速法は実用加速器化という点で本命視されている．しかし純粋にレーザー航跡場加速と解釈される実験結果はあまり多くはない[76,77]．最初にレーザー航跡場加速の実験で加速を観測したのは日本のチームであるが[76]，ここでは図 5.5 により新しいフランスのチームの結果を示す[77]．用いられたレーザーは波長 1.06 μm，パルス幅 400 fs で，密度 $2.2 \times 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$ の He プラズマに航跡場を立てた．バン・デ・グラフからの 3 MeV の電子ビームを加速し，加速勾配は最大 16 GeV/m と報告されている．図の実線が観測データ，点線がシミュレーションの結果である．実線と点線の差は雑音によるものと思われる．

ビーム航跡場加速において，連続した多数のバンチをドライブバンチとすれば，個々のバンチの電荷は小さくても，積み重ねて大きな航跡場を作れることを示した．レーザー航跡場加速においても，連続した多数のレーザーパルスにより類似の効果が得られることが，線形の場合[78]および非線形の場合[79]につき計算されている．またビーム航跡場加速にはトランス比なるものが存在したが，この概念をレーザー航跡場加速に拡張し，ドライブレーザーパルス波形の最適化に応用した論文がある[80]．

1999 年夏の時点で短パルスレーザーによる加速で得たもっとも大きなエネル

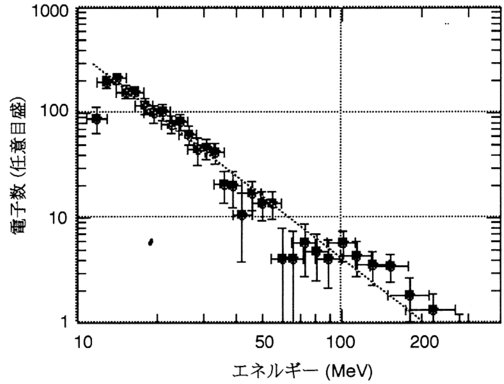


図 5.6　レーザー航跡場によって加速された高エネルギー電子[17)]

ギー利得は 200 MeV である[17)]．図 5.6 はこの実験で得られた電子のエネルギースペクトルである．用いられたレーザーは波長 800 nm，パルス幅は 100 fs であった．この実験にはそれまでの理論と異なる発見が 2 点あった．第 1 はレーザー出力が限界出力以下で，しかもプレチヤネルをつくる工作をしなかったにもかかわらずレーザーのチヤネリングが起こつたこと，第 2 は式 (5.26) から導かれるプラズマ密度よりも一桁以上高いプラズマ密度で大きな加速勾配が得られたことである．この結果に関してはいろいろな議論があるが，結論は出ていない．

5.4　長パルスレーザーによるプラズマ波の励起

A．誘導ラマン散乱

レーザー航跡場加速はプラズマ波長程度の短いパルス幅をもつレーザーを用いた．しかし逆にプラズマ波長よりも十分長いパルス幅をもつレーザーでもプラズマ波は励起される．この現象を誘導ラマン散乱 (stimulated Raman scattering) という．これは周波数 ω_L のレーザーをプラズマ中に入射すると，周波数 ω_p をもつプラズマ波が励起するとともに，周波数 $\omega_\mathrm{s} = \omega_\mathrm{L} - \omega_\mathrm{p}$ の散乱光が得られる現象である．3 つの光の間には周波数に関しては

$$\omega_\mathrm{L} = \omega_\mathrm{s} + \omega_\mathrm{p} \tag{5.33}$$

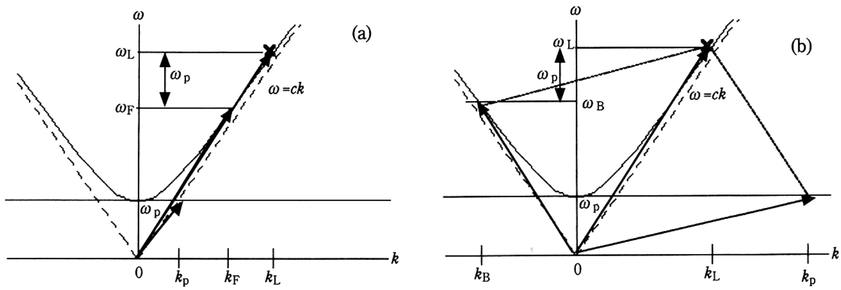


図 5.7　誘導ラマン散乱の分散関係．(a) 前方散乱，(b) 後方散乱

波数ベクトルに関しては

$$k_{\rm L} = k_{\rm s} + k_{\rm p} \tag{5.34}$$

の関係がある．また入射光・散乱光ともプラズマ中を伝播するので

$$\omega_{\rm L}^2 = \omega_{\rm p}^2 + (ck_{\rm L})^2, \qquad \omega_{\rm s}^2 = \omega_{\rm p}^2 + (ck_{\rm s})^2 \tag{5.35}$$

である．

誘導ラマン散乱の分散関係を図 5.7 に示す．$k_{\rm L}$ と $k_{\rm s}$（図では後方散乱と区別するために $k_{\rm F}$ と書いた）が同じ向きの

$$k_{\rm p} = k_{\rm L} - k_{\rm s} \sim \frac{\omega_{\rm p}}{c} \sim k_{\rm L}\frac{\omega_{\rm p}}{\omega_{\rm L}} \tag{5.36}$$

を前方散乱，$k_{\rm L}$ と $k_{\rm s}$（図では前方散乱と区別するために $k_{\rm B}$ と書いた）が逆向きの

$$k_{\rm p} = k_{\rm L} + k_{\rm s} \sim 2k_{\rm L} \tag{5.37}$$

を後方散乱という．前方散乱で励起されるプラズマ波の位相速度は

$$v_{\rm p} = \frac{\omega_{\rm L} - \omega_{\rm s}}{k_{\rm L} - k_{\rm s}} \sim \frac{\partial \omega_{\rm L}}{\partial k_{\rm L}} = \frac{c^2 k_{\rm L}}{\omega_{\rm L}} = c\left(1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega_{\rm L}^2}\right) \tag{5.38}$$

であって c に近いので，粒子加速に利用できる．後方散乱は

$$v_{\rm p} \sim \frac{\omega_{\rm L} - \omega_{\rm s}}{2k_{\rm L}} = \frac{c\omega_{\rm p}}{2\omega_{\rm L}} \tag{5.39}$$

であって c よりはるかに小さい．こちらは陽子やイオンの加速に利用できる可能性がある[4)]．

B. 自己変調レーザー航跡場加速

誘導ラマン散乱は，言い換えれば，プラズマ波長によるレーザー包絡線の変調である．この変調は，レーザーのパルス幅がプラズマ波長に比べて十分長くなければ起きようがない．これは前節で述べた，レーザー航跡場加速では，レーザーのパルス幅はプラズマ波長程度であるべしとした要請と矛盾する．誘導ラマン散乱による加速とすでに述べたレーザー航跡場加速を区別するために，後者に標準(standard)という形容詞をつけることがある．

この誘導ラマン散乱はある種の不安定性である．この不安定性を引き起こすには，「レーザーのパルス幅がプラズマ波長に比べて十分長い」という条件のほかに，引き金となる動的な条件が必要である．先に述べた相対論的チャネリングがこの動的条件を満たす．図5.8はこのような条件下でのシミュレーションの結果である[19]．

ここではレーザーのパワーは10 TW=1.5 P_c，レーザーのパルス長は，プラズマ密度 $2.8 \times 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$ のとき $2.25\,\lambda_p$ となるように選んである．レイリー長の6倍を過ぎても，加速勾配のピーク値はまだ100 GeV/m を越え，最終的にエネルギー利得は430 MeV となる．これに対し，同じレーザーを用い，プラズマ密度を，与えられたパルス長と $\sigma_z = \lambda_p/\pi$ の関係を満たすように，すなわち $1.4 \times 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$ と設定すると，エネルギー利得はわずかに4.8 MeV にすぎ

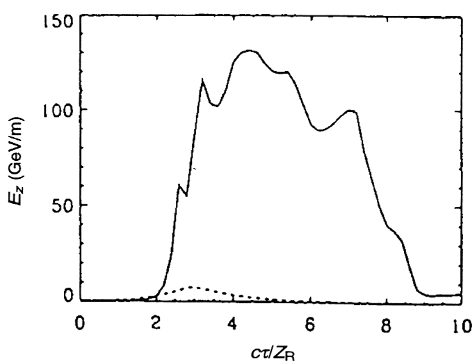


図 5.8 加速勾配とエネルギー利得の時間依存性．実線はプラズマ密度 $2.8 \times 10^{18}\mathrm{cm}^{-3}$ で，自己変調レーザー航跡場加速器のとき．点線はプラズマ密度 $1.4 \times 10^{17}\mathrm{cm}^{-3}$ で，標準的なレーザー航跡場加速のとき[19]

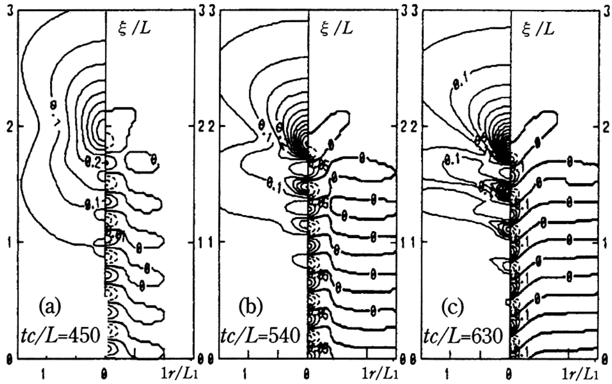


図 5.9　自己変調レーザー航跡場加速における，レーザー強度(左半分)とプラズマ密度(右半分)の 2 次元分布の時間変化[81)]

ない．

この方法は，レーザーの包絡線が相対論的チャネリングの結果プラズマ周波数で変調されることから，自己変調レーザー航跡場加速と呼ばれている．この変調現象は誘導ラマン散乱にほかならないが，この結果生じるプラズマ波の電場もまた航跡場とみなしこの名がつけられた．自己変調はレーザーの収束と，これに伴うプラズマ密度の変化が相互に影響しあう結果である．図 5.9 に示すシミュレーションでは，レーザー強度とプラズマ密度の 2 次元分布の時間変化が，それぞれ同じ座標上で左半分と右半分に示してある[81)]．まず (a) のように，レーザーの強度が軸方向に最大となる点で，相対論的な効果でレーザーが半径方向に収束を始める．これに伴って，軸上で軸方向にレーザー強度が急激に変化する点が生まれる．勾配が c/ω_p より大きくなるとプラズマに密度変化が生じる．

プラズマ密度の変化すなわち屈折率の変化により，プラズマ密度が大きいところではレーザー強度が小さく，逆にプラズマ密度が小さいところではレーザー強度が大きくなる．レーザー強度が大きいところではレーザーがさらにプラズマ電子を押しのける．このように正のフィードバックループが生まれ，プラズマ波は図 5.9(b) から (c) へと急激に成長する．この状態ではプラズマ波とレー

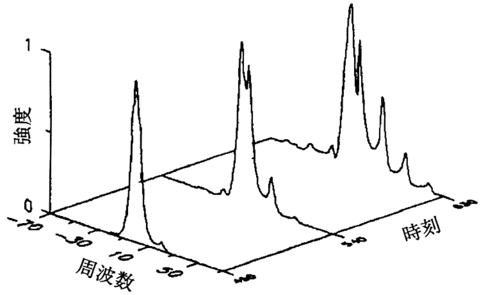


図 5.10　前の図に対応する時刻におけるレーザーのスペクトル．周波数の単位は L を距離として，$(\omega - \omega_{\rm L})L/c$ である[81]

ザーの強度変調が同期し，あたかもビート波加速のごとき様相を呈する．

シミュレーションではこの状態は，レーザーが過剰に収束したために逆に発散し，プラズマ波とレーザーの強度変調の同期が崩れることで終わりを告げる．また図 5.10[81] に示すシミュレーションでは，入射したレーザーの波長がプラズマ波長で変調される現象が観測されている．プラズマ中の電子は加速されるが，シミュレーションによればその最高エネルギーは

$$E \sim 2(\omega_{\rm L}/\omega_{\rm p})^2 m_{\rm e} c^2 \tag{5.40}$$

である[82]．

自己変調レーザー励起航跡場加速は高密度プラズマを使うので加速勾配が大きく，大エネルギー利得が得られる．繰り返すが，自己変調が起こる条件は 2 つで，第 1 はレーザーが相対論的光導波路を形成できるだけの出力をもつこと，第 2 はレーザーのパルス長がプラズマ波長に比べ十分長いことである．最初の自己変調レーザー励起航跡場加速の実験もやはり KEK（当時の高エネルギー物理学研究所，現在は高エネルギー加速器研究機構）・大阪大学レーザー核融合研究センター・名古屋大学プラズマ科学センター・宇都宮大学・テキサス大学オースチン校の混成チームにより，大阪大学レーザー核融合研究センターにおいて行われた[21]．つづいて行われたラザフォード・アップルトン研究所(RAL)の実験では，25 TW，800 fs のレーザーが使われた[22]．ことさら外部からテスト電子を入射しなくても，レーザーの電場がプラズマ中の電子を捕捉しさらに

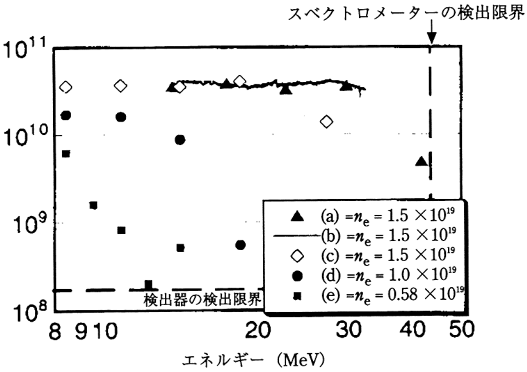


図 5.11　RAL において得られた自己変調レーザー航跡場加速による電子のエネルギースペクトル[22)]

これを加速した結果，電子のエネルギーが最高 44 MeV に達することが観測された．加速長は 300 μm なので，加速勾配は 100 GeV/m を越える．30 MeV に加速された電子の電流は 1 A，エミッタンスは 5π mm · mrad と報告されている．さらに，図 5.11 に示した電子のエネルギースペクトルに対応する[22)]レーザースペクトルのプラズマ周波数による変調も，図 5.12 に示すように観測された[22)]．この図において，10^{19} cm^{-3} 台の高密度プラズマではスペクトルが明瞭でないのは，プラズマ波の破壊が起こっているためと解釈されている．このほか NRL[83)]，ミシガン大学[84)]でも自己変調レーザー励起航跡場加速の実験が報

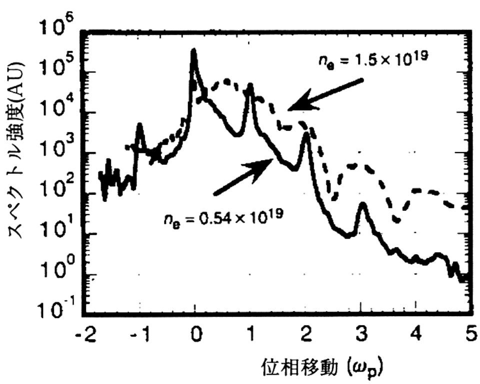


図 5.12　自己変調されたレーザーのスペクトル[22)]

告されている．

自己変調レーザー航跡場加速は高密度プラズマを使うので，加速長は回折長ではなく，位相のずれで制限される．また大出力レーザーを使うために，プラズマ波の振幅は大きく，非線形になる．非線形化に伴うプラズマ周波数の低下も実験で確かめられている[85]．最近の報告では，自己変調レーザー航跡場加速で得られたエネルギー利得は脱位相長から計算した値より大きい[86]．シミュレーションではこれと矛盾しない結果が得られるが，物理的な機構は複雑らしい．

5.5　ビート波によるプラズマ波の励起

ビート波加速はレーザーのビート波によりプラズマ波を励起し，これを粒子加速に用いる方法である[26]．先に述べた誘導ラマン散乱も入射光と散乱光のビート波によるプラズマ波生成と解釈できる．ビート波加速ではこれをもっと積極的に行い，散乱光を人為的に供給するものである．数年前まではレーザー加速といえばこのビート波加速のことであった．田島-ドーソン (Tajima-Dawson) の提案[10]後まもなく UCLA で実験が開始された．結果はなかなか出なかったが，この間に蓄積された理論・実験両面のノウハウが現在の世界のレーザー/プラズマ加速を支えているということができる．

2 つの，周波数がそれぞれ ω_1，ω_2 のレーザーの周波数差がプラズマ周波数に等しいとき，すなわち

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_{\mathrm{p}} \tag{5.41}$$

のとき，プラズマ波が成長する．2 つのレーザーのレーザー強度パラメータをそれぞれ a_1，a_2 と書けば，これらを合成した波のレーザー強度パラメータは

$$a = a_1 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + a_2 \cos(k_2 z - \omega_2 t)$$

である．レーザー航跡場加速のときに導いた式 (5.18) にならって

$$m_{\mathrm{e}} \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -m_{\mathrm{e}} c^2 \nabla \left(\frac{a^2}{2} \right)$$

と運動方程式を書くと，$\Delta k = k_1 - k_2$ を用いて

$$a^2 = a_1 a_2 \cos(\Delta k z - \Delta\omega t) \tag{5.42}$$

となる．式 (5.22) を用いると，式 (5.21) に対応する式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + {k_{\mathrm{p}}}^2 \phi = -{k_{\mathrm{p}}}^2 \phi_{\mathrm{p}} \cos(\Delta kz - \Delta \omega t)$$

となる．

この式が，条件 (5.41) を満たすとき，すなわち

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + {k_{\mathrm{p}}}^2 \phi = -{k_{\mathrm{p}}}^2 \phi_{\mathrm{p}} \cos k_{\mathrm{p}} \xi \tag{5.43}$$

あるいは時間領域で

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega_{\mathrm{p}}^2 \phi = -\omega_{\mathrm{p}}^2 \phi_{\mathrm{p}} \cos \omega_{\mathrm{p}} t \tag{5.44}$$

と書けるときに限り，強制振動が起こる．この解は C_1，C_2 を積分定数として

$$\phi = C_1 \cos k_{\mathrm{p}} \xi + C_2 \sin k_{\mathrm{p}} \xi + \frac{k_{\mathrm{p}} \phi_{\mathrm{p}} \xi}{2} \cos k_{\mathrm{p}} \xi$$

であるが，右辺第 3 項は時間とともに成長し，第 1·2 項に比べてはるかに大きくなるので

$$\phi = \frac{k_{\mathrm{p}} \phi_{\mathrm{p}} \xi}{2} \cos k_{\mathrm{p}} \xi \tag{5.45}$$

としてよい．

プラズマ波の位相速度は，$\omega_1^2 = \omega_{\mathrm{p}}^2 + c^2 k_1^2$ を用い

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \sim \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k_1}{\omega_1} = c \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_1^2} \right)^{1/2} \tag{5.46}$$

となる．レーザー航跡場のときと同じである．

式 (5.45) によればポテンシャル，したがって電場はどこまでも増大する．無限大に，とまでいかなくても，波の破壊限界までは行きそうなものだが，そうはいかない．第 2 章では位相のずれについて述べた．そこでは相対論的な効果を考慮しなかったが，この効果を考慮すると位相のずれの制限がもっと厳しくなる．すなわち強電場のもとで電子の運動が激しくなると，質量が増大し，プラズマ周波数が減少するために，レーザー周波数とずれる．これは相対論的チャネリングと同じ原因による現象である．

詳しい計算によれば，電子のプラズマ波による振動速度を v_{q} とし $\epsilon = v_{\mathrm{q}}/c$

とおけば，実効的なプラズマ周波数は

$$\omega_{\mathrm{eff}}^2 = \omega_{\mathrm{p}}^2\left(1 - \frac{3\epsilon^2}{8}\right), \qquad \Delta\omega = -\frac{3}{16}\omega_{\mathrm{p}}\epsilon^2(t) \tag{5.47}$$

である．v_{q} は電場に比例するので，電場が大きくなると ω_{eff} の ω_{p} からのずれが大きくなり，共鳴からはずれる．レーザー航跡場加速の場合と異なり，レーザーが強制振動を与えている途中で位相がずれてくるところが痛い．

どの程度の電場が得られるかを当たってみよう[87]．ϵ を最大電場 $m_{\mathrm{e}}\omega_{\mathrm{p}}c$ で正規化した電場とすれば

$$\epsilon = \frac{v_{\mathrm{q}}}{c} = \frac{ek_{\mathrm{p}}\phi_{\mathrm{p}}}{2m_{\mathrm{e}}c^2}\xi = \frac{e\phi_{\mathrm{p}}}{2m_{\mathrm{e}}c^2}\omega_{\mathrm{p}}t$$

である．$\Delta\omega$ が $\pi/2$ の位相のずれを与えたとき，加速が飽和するとみなす．

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^t \Delta\omega(t')\mathrm{d}t' = \frac{a_1^2a_2^2(\omega_{\mathrm{p}}t)^3}{256}$$

より，波の飽和は

$$\epsilon_{\mathrm{sat}} = \frac{a_1a_2}{4}\left(\frac{128\pi}{a_1^2a_2^2}\right)^{1/3} = (2\pi a_1a_2)^{1/3} \tag{5.48}$$

となる．$a_1 = a_2 = 0.1$ であれば $\epsilon_{\mathrm{sat}} = 0.25$ となる．

ビート波加速はビート周波数とプラズマ周波数がぴったりと一致しなければ成功しない．実験ではプラズマ密度を掃引してある密度においてのみ高エネル

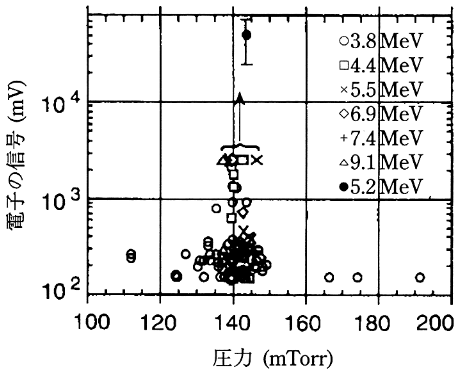


図 5.13　ビート波加速によって得られた高エネルギー電子数のプラズマ密度依存性[16)]

ギー粒子を観測できれば成功とする．最初に実験に成功したのは阪大レーザー研の北川のグループであるが[15]，図 5.13 には UCLA の実験結果を紹介する[16]．横軸の圧力はプラズマ密度に対応している．このときの加速勾配は 0.7 GeV/m と報告されている．このほか，カナダ・フランスでも実験に成功している[15]．

5.6　プラズマカソード

図 3.3 からわかるように，プラズマ波による加速ではテストバンチのバンチ長をプラズマ波長の少なくとも 1/4 以下とすることが理想的である．rf レーザーカソードとシケインに代表される磁気バンチ圧縮器を用い，正統的な方法でこのような短バンチを実現しようという努力が続いている[69]．ここでは別なアプローチ，レーザーでプラズマ波を励起し，さらにこのプラズマ波によりプラズマ電子を捕捉してバンチ化する方法を検討したい．これが可能であれば，レーザー/プラズマ加速ではいわゆる電子銃は必要でなくなる．

プラズマ波による電子の捕捉についてはすでに第 2 章で述べた．プラズマ波の振幅が破壊限界に近づき（ϵ が 1 に近づき），波の位相速度が c に近ければ，プラズマ波は低エネルギー電子でも捕捉できるというのがそこでの結論であった．とくに自己変調レーザー航跡場加速では $\epsilon \sim 1$ なのでプラズマ波によるプラズマ電子の捕捉が可能である．ちなみに密度 $10^{18}\mathrm{cm}^{-3}$ のプラズマは $10\,\mu\mathrm{m} \times 10\,\mu\mathrm{m} \times 10\,\mu\mathrm{m}$ の体積に 10^9 個すなわち 160 pC の電子をもつ．この数 % を集めることができれば，十分ビームとして役立つ．

すでに述べたように，このプラズマ波による電子の捕捉という現象は RAL における自己変調レーザー航跡場加速で観測されている．プラズマカソードあるいは lilac (laser-injected laser accelerator) と呼ばれる方法は，これを一歩前進させるものである．

RAL の実験は進行方向のプラズマ航跡場だけでバンチを形成したものであった．しかしプラズマ航跡場は半径方向にも生じる．さらに航跡場を生成するレーザー（あるいは粒子ビーム）径がプラズマ波長に比べて小さければ，半径方向の航跡場は進行方向のそれより大きい．図 5.14 のようにもう 1 本のレーザービームを，加速用レーザービームと直交させ，しかも前者の交点におけるウェストを小さく絞ることにしよう[88]．タイミングを最適化すれば前者の半径方向航跡

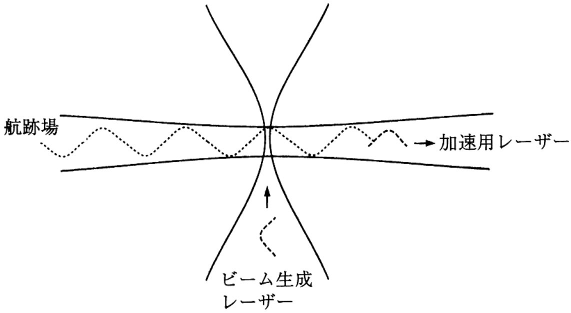


図 5.14　プラズマ波によるビーム生成(lilac)

場により，プラズマ電子を後者の進行方向航跡場の加速位相に乗せることが可能である．

この方法は複数の研究機関で実験が計画されている．また，第 2 のレーザー(図 5.14 における injection pulse)として，第 1 のレーザーに垂直ではなく同軸に入射する方法（この場合，第 2 のレーザーのレイリー長を第 1 のレーザーに比べずっと短くする)，第 2 のレーザーに替えて 2 つのレーザーのビート波を使う方法など[89]が提案されている．

6章 おわりに ——加速器としてのレーザー/プラズマ加速

ここでは加速器としてのレーザー/プラズマ加速を考察する．まず旧来のrf加速器とレーザー/プラズマ加速器を比較してみよう．rf加速器では電磁波が外部から供給されるのに対し，レーザー/プラズマ加速器ではプラズマ波が加速器内部で発生する．rf加速器のフィリングタイム(filling time)に相当する概念がない．強いていえばビート波加速器においてプラズマ波の振幅が飽和するまでの時間がフィリングタイムに相当するといえるかもしれない．なお文献90)ではレーザー/プラズマ加速器のシャントインピーダンス，Qファクター，トランジットタイムファクターなども論じている．なおrf加速器では電磁波がさまざまなモードをもつが，プラズマ波の場合はプラズマ周波数で代表されるモードが支配的である．これはプラズマ加速器の大きな美点である．

rf加速器では電磁波のエネルギーはビームあるいは加速管壁に吸収されるだけだが，レーザー/プラズマ加速のエネルギーの流れはもっと複雑である．図6.1はレーザー航跡場加速とビーム航跡場加速において次つぎと起こる諸過程を図示したものである．図6.1(a)のレーザー航跡場加速では電気エネルギーがまずレーザー(光)に姿を変え，次にプラズマ波へと変身する．この間レーザーはプラズマ生成にも一役買う．回折によってエネルギーを失うわけではないが，エネルギーの有効利用は不可能になる．プラズマ波ができたあとも，脱位相が生じ得る．ビーム負荷，自己変調はそれぞれビームからプラズマへ，プラズマからレーザーへという逆向きの反作用である．

図6.1(b)のビーム航跡場加速の方はレーザー航跡場加速よりもいくぶん単純である．粒子ビームにもレーザーのようにトンネル電離でプラズマを生成する能力がないわけではないが[91]，ビーム航跡場加速ではあらかじめプラズマを作る方が一般的である．この点ではビーム航跡場加速の方がレーザー航跡場加速

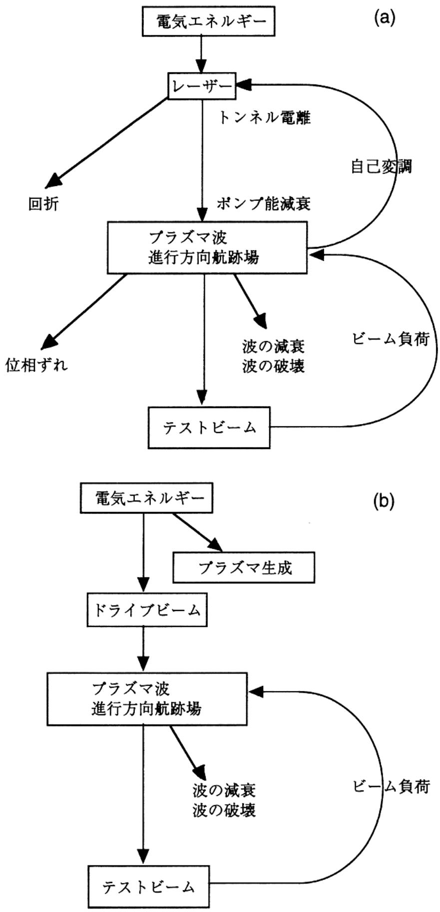


図 6.1　(a) レーザー航跡場加速および (b) ビーム航跡場加速における諸過程[90)]

よりもやっかいである．ただしビーム航跡場加速では回折，脱位相などに頭を悩ます必要はない．ポンプ能枯渇長はビーム航跡場加速においては式 (5.32) に対応して

$$L_{\rm pump} = \frac{2\gamma N m_{\rm e} c^2}{eE_{z0}} \qquad (6.1)$$

である．ただし γ, N はそれぞれドライブバンチのエネルギーと粒子数，eE_{z0} は航跡場の振幅である．

航跡場を励起するためのレーザー装置とビーム発生器(すなわち線形加速器)とで，どちらが小規模ですむかということになると，レーザーの方が小規模である．また加速にすぐ使用できるレーザーが商品化されている．これは近年のレーザーの発達によるものである．一方，ビーム励起用の線形加速器は大電流であることが要求されるため，特殊仕様のものとなる．ビーム航跡場加速は加速器の研究所でなければ実験しづらい面があり，現に1998年の時点ではSLAC (Stanford Linear Accelerator Center)，BINP (Budker Institute for Nuclear Physics)，ANL (Argonne National Laboratory) で実験が計画されている．一方，レーザー加速の研究はより多数の機関で行われている．1999年の時点でもっとも盛んなのは自己変調方式で, RAL (Rutherford Appleton Laboratory)，NRL (Naval Research Laboratory)，ミシガン大学, 大阪大学レーザー核融合研究センターなどで研究が行われている．KEK-JAERI (日本原子力研究所) − 東京大学のグループとフランスのLULI (Laboratoire pour Utilisation des Lasers Intenses) は標準的なレーザー航跡場加速を探求している．ビート波加速に取り組むグループは一時に比べて減少したが，UCLA (カリフォルニア大学ロスアンジェルス校)のグループはこの方式に執着している．

現在自己変調レーザー航跡場加速に取り組むグループが多いが，これはすぐに大きな加速勾配が得られるためであろう．しかしこの方法は後方ラマン散乱という不安定性に基づいているので，加速器としての実用化は疑問視する向きもある．文献 92) では種(たね)レーザーの使用により相対論的チャネリングのためのレーザーの臨界出力値を下げることが提案されているが，この手法はまた不安定性の再現性を向上させるためにも役立つかもしれない．

レーザーによる加速の最大の問題はレーザーの平均出力と電気効率にある．この加速法は加速勾配が大きいので，リニアコライダーに適用すれば，加速器の長さを桁違いに短縮できると期待される．しかし，リニアコライダーのルミノシティが要求するビームパワーと，現在のレーザーのパワー（ピークパワーではなく平均出力）では大きく桁が違う．例えば出力 1 TW パルス幅 100 fs のレーザーのエネルギーは 100 mJ である．これは 624×10^{15}eV なので，エネルギー利得を 1 GeV とすると，効率 100 %でビームエネルギーに変換できるとしても，加速できる電子数は 10^9 個に満たないことになる．しかもこのレーザー

のパルス周波数は現時点で 10 Hz 程度である．一方，TeV 領域のリニアコライダーでは 10^{10} 個のオーダーの電子を平均 5 kHz 程度で加速することが必要とされる．100 mJ のレーザーが何台必要とされるか勘定していただきたい．

また，現在のクライストロンを用いる加速器の，ウォールプラグ効率(壁コンセントからとった電力がビームパワーに変わる効率)は約 20 % である．現在のレーザーでは，電力から光パワーへの変換効率でさえ 0.1 %以下である．パワーの面で満足できるレーザーが出現したとしても，エネルギー効率の面でレーザー加速は現在の加速法にとうてい太刀打ちできそうにない．

レーザー技術のさらなる発展，とくに半導体レーザーに効率向上を期待することは可能であろう．また，ビーム電流を下げても，エミッタンスあるいは衝突点のビームサイズを小さくすれば，ルミノシテイを損なわずにすむ．こうした観点から，結晶中のチャネリング放射光を利用したエミッタンス減少法[93)]，すでに述べたプラズマレンズによるビームサイズの縮小などが提案されている．またこうした楽天的?な前提に基づき，レーザー/プラズマ加速に基づいたリニアコライダーの設計も試みられている[94)]．

この加速法が数年前にはサイエンスフィクションと思われていたことを思えば，これに対し過度の期待をすることも，いたずらに悲観的な態度をとることも賢明ではない．今後の研究の進展から目を離さないでいただきたい．

参考文献

1) レビュー．E. Esarey *et al.*: *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **24**, 252 (1996)，文献のカタログとしての価値大；また，プラズマ・核融合学会誌 73(1997) 第 4 号から 10 号に「高出力超短パルス電磁波とプラズマの相互作用」と題する講座が掲載されており，レーザー/プラズマ加速も重要な主題となっている．
2) 唯一の教科書的参考書．杉原亮，西田靖，小方厚：超小型加速器——プラズマ・レーザー加速器，(株) アイピーシー (1998)
3) 大森恒彦，広瀬立成：日本物理学会誌 53 766 (1998)
4) A. Ogata & T. Katsouleas: AIP Conf. Proc., 472, 551 (1999)
5) M. O. Scully & M. Z. Zubairy : *Phys. Rev.*, **A44**, 2656 (1991) ; S. Takeuchi *et al.* : J. Phys. Soc. Jpn., **63**, 1186 (1994)
6) T. Hauser *et al.* : *Phys. Lett., A***186**, 189 (1994) ; T. Maruyama & S. Tawata : *Int. J. Electromag. in Materials*, **3**, 465 (1992)
7) R. Sugihara : *Jpn. J. Appl. Phys.*, **30**, 76 (1991) ; K. Otsuka *et al.*; ibid., **33**, 5933 (1994)
8) N. M. Kroll *et al.* : *IEEE J. Quantum Electronics*, QE-17m 1436 (1981)
9) W. Kimura *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 546 (1995)
10) T. Tajima & J. M. Dawson : *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 267 (1979)
11) J. B. Rosenzweig *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 98 (1988)
12) P. Chen *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 693 (1985)
13) A. Ogata : *AIP Conf. Proc.*, **279**, 420 (1993)
14) D. Strickland & G. Mourou : *Opt. Commun.*, **56**, 219 (1985)
15) Y. Kitagawa *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 20 (1992) ; N. A. Ebrahim : *J. Appl. Phys.*, **76**, 7645 (1994) ; F. Amiranoff *et al* : *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 5220 (1995)
16) C. E. Clayton *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 37 (1993)
17) H. Dewa *et al.* : *Nucl. Instr. and Meth.*, **410**, 357 (1998)
18) C. G. Durfee III & H. M. Milchberg : *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 2409 (1993)
19) J. Krall *et al.* : *Phys. Rev., A* **48**, 2157 (1993)
20) N. Andreev *et al.* : *Sov. Phys. JETP*, **55**, 571 (1992)
21) K. Nakajima *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 4428 (1995)
22) A. Modena *et al.* : Nature, **377**, 606 (1995)

23) P. Mora *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 1611 (1988)
24) J. P. Matte & F. Martin : *Plasma Phys. Cont. Fusion*, **30**, 395 (1988) ; R. Bingham *et al.* : ibid., **29**, 115 (1987)
25) F. Chen : Introduction to Plasma Physics & Controlled Fusion, 2nd ed., vol.1, Plenum Press, NewYork (1985) ; 第 1 版は邦訳されている
26) 北川米喜：プラズマ・核融合学会誌 **73**, 1087 (1997) ; N. A. Ebrahim & S. R. Douglas : *Laser and Part. Beams*, **13**, 147 (1995)
27) A. I. Akhiezer & R. V. Polovin : *Sov. Phys. JETP*, **3**, 696 (1956)
28) R. J. Noble : Proc. 12th Int. Conf. High-Energy Accelera-tors, Fermilab., (1983), p467
29) J. Rosenzweig : *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **15**, 186 (1987)
30) R. Sugihara & Y. Midzuno : *J. Phys. Soc. Jpn.*, **47**, 267 (1949) ; J. M. Dawson *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 1455 (1983)
31) T. Katsouleas & J. M. Dawson : *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 392 (1983)
32) Y. Nishida *et al.* : *Phys. Lett.*, **105A**, 300 (1984) ; Y. Nishida *et al.* : *Phys. Fluids*, **28**, 1574 (1985)
33) S. Takeuchi *et al.* : *Phys. Lett., A***122**, 257 (1987) ; N. Yugami *et al.* : *Phys. Rev. Let.*, **76**, 1635 (1996)
34) 西田靖：プラズマ・核融合学会誌 **73**, 975 (1997) ; 杉原亮，竹内智：ibid, **73**, 1101 (1997)
35) T. Weiland : Proc. ECFA-CAS/CERN-IN2P3-IRF, CEA-EPS Workshop, New Development in Particle Acceleration Techniques, Orsay(1987) (CERN 87-11, ECFA 87/110), p291
36) H. Nakanishi *et al.* : *Nucl. Instr. and Meth., A***328**, 596 (1993)
37) R. D. Ruth *et al.* : *Part. Accel.*, **17**, 171 (1985)
38) S. Vaganian & H. Henke : *Part. Accel.*, **48**, 239 (1995)
39) K. Nakajima *et al.* : *Nucl. Instr. Meth., A***292**, 12 (1990)
40) P. Wilson : *AIP Conf. Proc.*, **87**, 450 (1983)
41) K. L. F. Bane *et al.* : *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-32, 3532 (1985)
42) P. Schutt *et al.* : DESY M-88-13 (1988, unpublished report) ; K. Nakajima : *Part. Accel.*, **32**, 209 (1990)
43) J. B. Rosenzweig *et al.* : *Phys. Rev., A***44**, R6189 (1991)
44) A. Ogata : *AIP Conf. Proc.*, **279**, 420 (1992)
45) A. Ogata *et al.* : *Part. Accel.*, **39**, 33 (1992)
46) W. Gai *et al.* : *Nucl. Instr. and Meth.*, **410**, 431 (1998)
47) B. L. Milistyn *et al.* : *Phys. Fluids., B***5**, 2714 (1993) ; A. M. Kudryavtsev *et al.* : *Nucl. Instr. and Meth.*, **410**, 388 (1998)

著者略歴

坂井　伸之（さかい　のぶゆき）

1995 年　早稲田大学理工学研究科博士課程修了

専　攻　宇宙物理学，一般相対論

現　在　ケンブリッジ大学数理科学センター客員研究員　博士(理学)

大槻　東巳（おおつき　とうみ）

1989 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了

専　攻　物性理論

現　在　上智大学理工学部助教授　理学博士

小方　　厚（おがた　あつし）

1965 年　東京大学工学部原子力工学科卒業

専　攻　ビーム物理学，加速器工学

現　在　広島大学大学院先端物質科学研究科教授　工学博士

現代物理最前線 2

2000 年 5 月 15 日　初版 1 刷発行

編者　大槻義彦　

発行　**共立出版株式会社**／南條光章

東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号

電話　東京(03)3947-2511 番（代表）

郵便番号 112-8700

振替口座 00110-2-57035 番

URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印刷　加藤文明社

製本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止

NDC 420

ISBN 4-320-03387-6

Printed in Japan